



# Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées

Guillaume Guguin

## ► To cite this version:

Guillaume Guguin. Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2014. Français. NNT : 2014DENS0036 . tel-01215882

**HAL Id: tel-01215882**

**<https://theses.hal.science/tel-01215882>**

Submitted on 15 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Guillaume Guguin**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE – GÉNIE MÉCANIQUE – GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la  
simulation des assemblages de plaques composites  
stratifiées.**

Soutenance à Cachan le 12 Novembre 2014 devant le jury compose de :

<b>Patrice Cartraud</b>	École Centrale Nantes	Président
<b>Michel Salaün</b>	ISAE	Rapporteur
<b>Ferdinando Auricchio</b>	Université de Pavie	Rapporteur
<b>Stéphane Guinard</b>	EADS-IW	Examineur
<b>Mickaël Abbas</b>	EDF R&D	Examineur
<b>Pierre Gosselet</b>	CNRS	Directeur de Thèse
<b>Olivier Allix</b>	ENS de Cachan	Co-Directeur de Thèse

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Quelques mots pour remercier l'ensemble des personnes que j'ai pu croiser au fil de ces années :

En premier lieu je voudrais remercier mes encadrants : Olivier Allix pour toutes les réunions très riches en idées et sa persévérance communicative. Pierre Gosselet pour sa bonne humeur, ses petits conseils et grandes idées, ainsi que pour les fastidieuses relectures que je lui ai fait subir. J'ai vraiment eu énormément de chance d'avoir pu travailler avec vous deux. Le sujet nécessitait vos deux approches et sensibilités particulières.

À mon jury : Merci à Patrice Cartraud d'avoir accepté d'être président du jury, dont les questions et remarques ont ouvert de nouvelles perspectives de travaux. *Grazie mille* à Ferdinando Auricchio pour avoir eu le courage de rapporter mon manuscrit en français, cela a été pour moi un grand honneur de vous voir parmi mon jury. Merci à Michel Salaün, tout d'abord pour le rapport très détaillé de mon manuscrit, et dont les remarques ont pu guider mes choix pour la présentation. Merci aux composantes plus industrielles de ce jury : Stéphane Guinard partenaire initial sur ce sujet, qui nous a fourni le contexte industriel poussant l'évolution des travaux et la justification de l'approche proposé ici. Merci à Michael Abbas, pour les réunions autour du Code\_Aster, même si la documentation est exemplaire, parfois la sagesse d'un développeur est quand même pratique.

Merci à amis et collègues du LMT et de l'ENS-Cachan : À Sylvain, avec qui je garderai toujours les souvenirs de la préparation du café pour les réunions « pti'dej' » du vendredi matin, ainsi que l'expérience délicate de l'enseignement. À François, pour les innombrables soirées jeux de plateau (avec parfois le bonus cuisine auvergnate), les recettes de cuisines faciles et tout les petits gadgets qui encombrent aujourd'hui mon bureau. À Charlotte (pour ces jeux de mots inimitables), et Adrien (compagnon de Code\_Aster et converti aux jeux de plateau). Merci à tous les collègues du laboratoire pour m'avoir fait passer de très belle année : la salle 211, le bar, le CdC...

Merci particulier à mes parents, pour avoir pu être présent lors de ma soutenance. J'espère que vous avez désormais une idée plus précise de mes travaux durant ces dernières années.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art sur les méthodes de couplage et les modèles plaques</b>	<b>5</b>
1.1 Les plaques : modélisations et propriétés . . . . .	6
1.1.1 Les modèles de plaques stratifiées dans la littérature . . . . .	6
1.1.2 Les relèvements 3D . . . . .	16
1.1.3 Les effets de bords et solution de St Venant . . . . .	20
1.2 Méthodes de raccord et de couplage global/local . . . . .	23
1.2.1 Méthodes d'homogénéisation et d'enrichissement . . . . .	24
1.2.2 Méthodes descendantes . . . . .	30
1.2.3 Méthodes de couplage fort . . . . .	34
1.3 Conclusion . . . . .	45
<b>2 Pré-étude sur un raccord 1D/2D</b>	<b>47</b>
2.1 Problème et solution de référence, modélisation hybride . . . . .	48
2.1.1 Problème de référence . . . . .	48
2.1.2 Définition du modèle hybride . . . . .	49
2.2 Étude des relèvements proposés . . . . .	52
2.2.1 Présentation des trois raccords . . . . .	52
2.2.2 Comparaison des différents raccords dans le cas isotrope . . . . .	56
2.2.3 Effets de la stratification pour le raccord plateau uniforme . . . . .	59
2.2.4 Etude de l'influence de la position du raccord . . . . .	60
2.3 Première application du couplage non-intrusif . . . . .	64
2.4 Conclusion . . . . .	66
<b>3 Relèvement numérique de la solution plaque</b>	<b>69</b>
3.1 Mise en place du problème de relèvement . . . . .	70
3.1.1 Reconstruction des efforts de section . . . . .	71

3.1.2	Reconstruction du gauchissement de section . . . . .	73
3.2	Vérification des champs obtenus . . . . .	75
3.2.1	Conditions aux limites imposées . . . . .	75
3.2.2	Indépendance de la position et l'orientation . . . . .	77
3.3	Implémentation et post-traitement numérique . . . . .	82
3.4	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Mise en place d'un raccord plaque/3D</b>	<b>87</b>
4.1	Application des conditions limites 3D associées aux relèvements . . . . .	88
4.1.1	Raccord en effort . . . . .	89
4.1.2	Raccord en travail équivalent . . . . .	90
4.1.3	Raccord en déplacement . . . . .	94
4.1.4	Résumé de ces approches . . . . .	96
4.2	Illustration de ces approches sur un exemple simple . . . . .	96
4.3	Conclusion . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Mise en oeuvre de la stratégie itérative Globale/Locale non-intrusive</b>	<b>103</b>
5.1	Mise en place de la stratégie . . . . .	104
5.1.1	Reformulation de la méthode . . . . .	104
5.1.2	Accélération par solveur de Krylov . . . . .	108
5.1.3	Une méthode de Schwarz optimisée . . . . .	110
5.2	Application au raccord plaque/3D . . . . .	111
5.2.1	Adaptation des étapes du couplage . . . . .	111
5.2.2	Introduction d'une « zone tampon » . . . . .	114
5.2.3	Mise en œuvre de la méthode . . . . .	115
5.3	Exemple sur un cas de plaque trouée stratifiée . . . . .	116
5.3.1	Convergence vers le modèle hybride . . . . .	117
5.3.2	Validation du modèle hybride . . . . .	117
5.4	Conclusion . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Application et développement de la méthode</b>	<b>123</b>
6.1	Cas d'assemblage de plaques . . . . .	124
6.1.1	Premier exemple, sans contact . . . . .	124
6.2	Traitement de plusieurs zones locales . . . . .	135
6.3	Limites et perspectives d'évolution de la stratégie non-intrusive . . . . .	137
6.3.1	Cas de chargements mal pris en compte . . . . .	138
6.3.2	Placement et validité du raccord . . . . .	139
6.3.3	Traitement de maillages incompatibles . . . . .	144
6.4	Conclusion . . . . .	146
	<b>Conclusion</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de la rigidité apparente pour le modèle réduit</b>	<b>151</b>

<b>B</b>	<b>Calcul des forces nodales entre le modèle plaque et le modèle 3D</b>	<b>153</b>
B.1	Lien chargements/forces nodales . . . . .	153
B.1.1	Cas linéaire . . . . .	154
B.1.2	Cas quadratique . . . . .	155
<b>Bibliographie</b>		<b>157</b>





# Table des figures

1	Exemple de liaison boulonnée entre deux plaques . . . . .	3
1.1	Schématisation du déplacement plaque. . . . .	8
1.2	Représentation simplifiée des contraintes dans une plaque stratifiée. . . .	15
1.3	Schématisation des effets de bord sur un cas de traction avec 4 plis orthotropes $(0^\circ/90^\circ)_s$ . . . . .	22
1.4	Allure des contraintes $\sigma_{yz}$ et $\sigma_{zz}$ en s'éloignant du bord libre. . . . .	23
1.5	Principe de l'homogénéisation multi-échelle . . . . .	25
1.6	Principe de l'homogénéisation multi-échelle discrète . . . . .	26
1.7	Application de l'homogénéisation multi-échelle discrète à un cas poutre/-plaque. . . . .	27
1.8	Schématisation de la méthode hp-d. . . . .	29
1.9	Raccord en déplacement par interpolation . . . . .	32
1.10	Schématisation de la méthode SBSF. . . . .	33
1.11	Schématisation de la méthode Arlequin. . . . .	34
1.12	Méthode de couplage par décomposition à 3 champs. . . . .	36
1.13	Élément de transition plaque/3D. . . . .	40
1.14	Élément de transition poutre/solide à cinq degrés de liberté. . . . .	41
1.15	Principe de l'enrichissement cinématique dans le modèle global. . . . .	43
1.16	Schématisation de la méthode non-intrusive. . . . .	44
2.1	Illustration de l'exemple considéré. . . . .	49
2.2	Solution de référence 2D. . . . .	50
2.3	Modèle hybride poutre/2D. . . . .	51
2.4	Effets des différents choix d'application du déplacement transverse pour le raccord plateau. . . . .	55
2.5	Comparaison des contraintes dans la section à l'interface pour les différents raccords . . . . .	56
2.6	Contraintes dans la plaque pour les raccords testés. . . . .	58
2.7	Histogramme des erreurs pour les différents raccords. . . . .	59
2.8	Contrainte transverse à l'encastrement pour un empilement $(0/90)_s$ de plis orthotropes. . . . .	60
2.9	Contraintes dans la plaque le long de l'axe $x$ et dans la section à l'interface. . . . .	61
2.10	Placement de l'interface de raccord à différentes abscisses $x_i$ . . . . .	62

2.11	Erreur et indicateur sur l'interface pour différentes abscisses $x_i$ du raccord.	63
2.12	Efforts généralisés pour différentes positions de l'interface $x_i$ .	64
2.13	Vue d'ensemble de la stratégie à l'itération $i$ .	65
2.14	Convergence avec correction sur $m_x$ et $q_x$ .	66
2.15	Evolution de l'erreur relative vis à vis de la référence.	67
3.1	Description des problèmes de relèvement.	72
3.5	Norme de la correction sur le champ de contrainte de Saint-Venant au cours des itérations.	78
3.7	Schéma de principe pour la vérification du relèvement.	79
3.12	Schéma de principe de l'extraction des forces nodales à l'intérieur de la portion de plaque.	83
3.13	Extraction numérique des forces nodales.	84
3.14	Comparaison des fonctions relevées sur les deux types de colonnes pour un maillage quadratique.	85
4.1	Décomposition pour l'étape de descente.	88
4.2	Support d'application des multiplicateurs de Lagrange $\delta(\Gamma)$ .	92
4.3	Illustration des instabilités sur les efforts généralisés (plaque isotrope).	93
4.4	Support d'application des multiplicateurs de Lagrange $P(0)$ .	94
5.1	Définition du modèle de référence et du modèle hybride.	112
5.2	Schéma du couplage avec recouvrement.	114
5.3	Comparaison des efforts généralisés aux interfaces $\gamma_I$ et $\gamma_C$ .	116
5.4	Représentation de la séparation des modèles dans la plaque trouée.	117
5.5	Évolution du résidu relatif au cours des itérations sur l'exemple de la plaque trouée.	118
5.7	Contraintes le long d'une ligne à 45 degrés.	120
5.8	Évolution des efforts généralisés le long d'une ligne à 45°.	121
6.1	Modèles utilisés dans la liaison boulonnée.	125
6.2	Définition du connecteur poutre.	126
6.4	Effort généralisé $N_{xy}$ et contrainte $\sigma_{xy}$ à la première descente.	127
6.5	Évolution du résidu relatif au cours des itérations (connecteur « souple »).	128
6.6	Évolution du résidu relatif au cours des itérations (connecteur « rigide »).	129
6.7	Effort généralisé $N_{xy}$ et contraintes $\sigma_{xy}$ au cours des itérations pour l'algorithme de gradient conjugué.	130
6.8	Modèles utilisés et modèle résultant de la liaison boulonnée avec contact.	130
6.10	Évolution du résidu relatif au cours des itérations.	131
6.11	Évolution du jeu maximal entre les plaques au cours des itérations.	132
6.12	Schéma du couplage Code_Aster / COFAST3D.	132
6.13	Représentation éclatée de la décomposition en sous-structures et interfaces de la liaison boulonnée.	133

6.15 Évolution du résidu relatif au cours des itérations pour le couplage Code_Aster / COFAST3D . . . . .	134
6.16 Carte du saut de déplacement tangentiel à l'interface. . . . .	135
6.17 Représentation d'un cas test avec plusieurs modèles locaux. . . . .	136
6.19 Courbe de convergence sur l'exemple de la plaque avec deux trous. . . . .	137
6.20 Illustration du problème d'effet de bord sur le couplage. . . . .	138
6.21 Illustration du cas de chargement à pression uniforme imposée. . . . .	140
6.24 Évolution du résidu et de la contrainte transverse en fonction du place- ment de l'interface. . . . .	143
6.26 Schématisation du traitement de maillages incompatibles. . . . .	145
6.27 Création d'un maillage où projeter le champ de contrainte local. . . . .	146



# Liste des tableaux

2.1	Comparaison des efforts généralisés, modèle poutre Euler-Bernouilli. . .	57
2.2	Comparaison des efforts généralisés à convergence. . . . .	65
3.1	Construction des problèmes de Saint-Venant. . . . .	71
3.2	Propriétés matériau. . . . .	73
4.1	Résumé des raccords proposés. . . . .	97
6.1	Propriétés matériaux utilisés dans les assemblages. . . . .	125



# Introduction

Ces dernières années, de nombreuses techniques de calcul « avancées » ont été développées dans le but de permettre la simulation de modèles de plus en plus réalistes. On notera en particulier l'explosion des approches multi-échelles ([Ben Dhia, 1998, Lavèze et Dureisseix, 2000]) et parallèles, ([Mandel et Brezina, 1993, Farhat et Roux, 1991, Cresta *et al.*, 2007]), ainsi que les méthodes d'enrichissements (X-FEM et G-FEM [Moës et Belytschko, 2002]). Ces méthodes permettent tout à la fois d'introduire plus de « physique » dans les calculs et de traiter des problèmes à très grand nombre de degrés de liberté. De nombreux codes de recherche ont été développés et démontrent tout l'intérêt de ces approches, cependant elles restent encore peu utilisées dans un cadre industriel, notamment parce que leur mise en œuvre dans les codes généralistes est *a minima* complexe.

Partant du constat que, dans de nombreuses situations, les phénomènes critiques demandant des analyses détaillées sont localisés, une pratique industrielle courante permettant d'enrichir une modélisation globale est celle du *submodelling*. Cette approche descendante consiste à appliquer à un modèle fin de la zone d'intérêt des conditions aux limites déduites d'un modèle grossier. La limite de cette méthode est qu'elle néglige les redistributions globales associées à une description fine des effets locaux ce qui peut entraîner des erreurs importantes comme cela est montré, par exemple, sur le cas du flambage dans [Cresta *et al.*, 2007].

Afin de surmonter cette difficulté, des méthodes non-intrusives, vocabulaire initialement utilisé dans le cadre stochastique [Berveiller *et al.*, 2006], ont été proposées ces dernières années en calcul des structures. C'est à ce type d'approches que cette thèse est dédiée. L'appellation « non-intrusive » provient du fait que l'on cherche à minimiser, voir à interdire, tout développement interne aux codes utilisés. L'essentiel du développement de la stratégie se situe autour d'outils standards, et procède par échange de quantités standards entre modèles, au prix d'itérations entre ceux-ci.

Un pré-requis des méthodes proposées [Gendre *et al.*, 2009] est de ne pas modifier les modèles et maillages déjà construits par les industriels. Lorsque les analyses locales sont possibles en utilisant le même logiciel l'ensemble des modèles et outils associés au *submodelling* sont réutilisés, ce qui rend le transfert de techniques avancées vers l'environnement industriel plus aisé. Dans ce cas ces approches rentrent dans le cadre des approches globales-locales proposées par Whitcomb [Whitcomb, 1991] mais cherchent à en améliorer l'efficacité. Dans le cas général ces approches visent à permettre un couplage aisé et efficace de codes, en général un code généraliste et un code spécialisé.



Ces techniques non-intrusives ont été proposées et développées dans le cas d'adaptation de modèle [Gendre *et al.*, 2009, Passieux *et al.*, 2013], d'analyse multi-échelle en temps et espace en dynamique explicite [Bettinotti *et al.*, 2013], de couplage G-FEM/FEM [Plews *et al.*, 2011], ou encore dans le cadre stochastique [Chevreuil *et al.*, 2013].

Le projet ANR ICARE qui regroupe des partenaires industriels (EDF, EADS-IW, DISTENE) et des laboratoires de recherche (LMT Cachan, GeM Nantes, UPS-IMT) témoigne de l'intérêt grandissant que rencontrent ces méthodes.

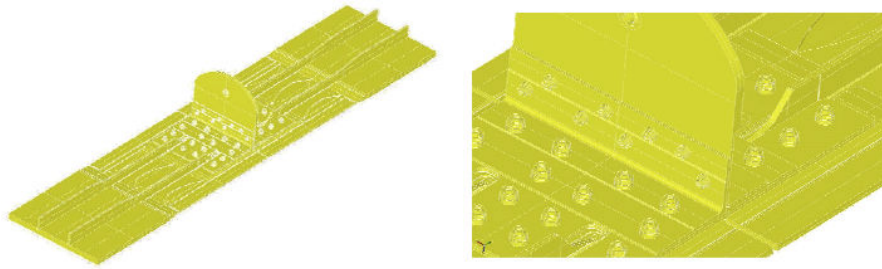
Dans le cadre de ce programme ANR, cette thèse vise à proposer des méthodes, concepts et outils permettant d'enrichir, par une description locale 3D, le cas des modèles industriels les plus courants, à savoir ceux de structures modélisées comme des assemblages de plaques et coques. Le code généraliste utilisé est le Code\_ASTER de EDF.

Un exemple typique est celui de l'analyse de la détérioration de composites stratifiés au voisinage d'une liaison FIG. 1. Valider et optimiser la conception d'une telle liaison implique une description fine de celle-ci et des composites employés en tenant compte des contacts et des endommagements localisés [Garg, 1988]. Cependant les analyses 3D complètes et fines de grandes structures sont encore et sans doute pour longtemps hors des possibilités des bureaux d'étude et des approches par *submodelling* ne permettent pas de tenir compte de la redistribution des flux d'efforts associés aux dommages locaux.

Dans ce cas il semble naturel d'avoir recours à un modèle hybride constitué de plaques et coques d'une part, pour la majeure partie de la structure, et d'autre part d'un modèle 3D précis pour traiter des liaisons. Un tel modèle est souvent complexe à créer et la voie suivie dans cette thèse est de le construire en utilisant le modèle plaque global de l'ensemble de la structure et d'y substituer de façon non-intrusive et localement le modèle 3D. Dans ce contexte, l'idée de départ était d'utiliser un relèvement 3D d'une solution plaque stratifiée afin de réutiliser ensuite le principe des méthodes non intrusives développées en 3D.

Les questions examinées dans cette thèse concernent alors la reconstruction pratique de ces relèvements et leur exploitation dans le cas de techniques de couplage non-intrusives. Des effets de bords parasites pouvant être observés à la jonction 2D-3D nous avons été amené à nous éloigner des techniques de couplage utilisées pour les modèles de même dimension. La question de l'amélioration de la vitesse de convergence de la méthode a été également regardée au moyen d'une réinterprétation de la méthode comme une méthode de Schwarz. Enfin de premières applications de la méthode dans le cas de liaisons complexes ont été effectuées, pour ce faire un couplage non-intrusif de Code\_ASTER avec un logiciel dédié a été mis en place.

Le manuscrit est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre est dédié à un état de l'art sur les thèmes du couplage entre modèles, sur la question de la modélisation des plaques pour des structures stratifiées et sur la reconstruction de champ 3D associés. Le second chapitre est consacré à une étude simplifiée dans le cas de raccord 1D/2D afin de mieux cerner les difficultés inhérentes liées à l'utilisation d'un relèvement pour un couplage non-intrusif. Le troisième chapitre développe la méthode de relèvement numérique



**FIGURE 1** – Exemple de liaison boulonnée entre deux plaques

proposée et essaye d'en analyser la qualité. Le quatrième chapitre étudie différentes possibilités de raccords et leurs implémentation non-intrusive. Le cinquième chapitre expose la stratégie itérative globale locale employée et la convergence vers le modèle final. Diverses optimisations de convergence y sont proposées. Le sixième chapitre propose des applications possibles du raccord développé dans le cas de liaisons et met en place un couplage code\_aster/COFAST3D, logiciel développé au LMT-Cachan par Laurent Champaney et dédié au traitement efficace 3D des liaisons caractérisée par des phénomènes de contact et frottement importants.



# Chapitre 1

## État de l'art sur les méthodes de couplage et les modèles plaques

*Ce chapitre présente un bref état de l'art des modèles plaques, ainsi que diverses techniques de couplage plus ou moins intrusives permettant de raccorder des modèles entre eux.*

### Sommaire

<b>1.1 Les plaques : modélisations et propriétés</b>	<b>6</b>
1.1.1 Les modèles de plaques stratifiées dans la littérature	6
1.1.2 Les relèvements 3D	16
1.1.3 Les effets de bords et solution de St Venant	20
<b>1.2 Méthodes de raccord et de couplage global/local</b>	<b>23</b>
1.2.1 Méthodes d'homogénéisation et d'enrichissement	24
1.2.2 Méthodes descendantes	30
1.2.3 Méthodes de couplage fort	34
<b>1.3 Conclusion</b>	<b>45</b>

Comme la problématique principale de la thèse tourne autour du raccord plaque/3D, il est nécessaire dans une première partie d'aborder les diverses modélisations des plaques, ainsi que les particularités des plaques stratifiées et du lien entre solution plaque et solution 3D. Dans une seconde partie, quelques méthodes de couplage de modèles sont décrites, et une attention particulière est accordée aux méthodes non-intrusives.

## 1.1 Les plaques : modélisations et propriétés

Une modélisation plaque consiste à considérer qu'une dimension, l'épaisseur, est petite devant les deux autres. Par conséquent il est possible de négliger certains termes d'épaisseur, de façon à obtenir une théorie avec relativement peu d'inconnues par rapport à un calcul 3D. Cette réduction de modèle dépend d'hypothèses formulées *a priori* et des méthodes utilisées pour résoudre le problème. Les approches étant relativement nombreuses et développées depuis plusieurs décennies, en faire ici un inventaire exhaustif n'est pas le sujet <sup>1</sup>. Il est cependant nécessaire d'en décrire les bases et les hypothèses spécifiques conduisant à des approches différentes, ainsi que les limitations ou phénomènes particuliers pouvant apparaître.

La première partie présente donc quelques modèles plaques et leurs impacts dans le cadre non-intrusif. La deuxième partie s'intéresse ensuite à la question de l'obtention d'un relèvement 3D à partir d'une solution plaque. Dans la dernière partie, le concept de solution de St Venant est rappelé, au travers de la décomposition entre solution intérieure régulière et solution d'effet de bord.

### 1.1.1 Les modèles de plaques stratifiées dans la littérature

Bien que le modèle de Kirchhoff-Love soit bien plus ancien, les modèles de plaques ont connu un développement important entre les années 1950 et 1970. En effet dès le début du calcul des structures, ils sont apparus comme un moyen d'accéder à un résultat avec un faible coût de calcul, analytique au début puis numérique, le calcul du modèle 3D étant inaccessible avec les moyens de l'époque.

De nos jours, la puissance de calcul a augmenté, mais la complexité et la taille des problèmes que l'on cherche à résoudre également. Aussi les modèles de plaques ou de coques sont encore très largement utilisés en industrie, excepté dans les zones où le calcul des non-linéarités exige un calcul tridimensionnel. Le principal enjeu des modélisations plaques reste donc d'avoir une bonne estimation des quantités d'intérêt 3D tout en minimisant les coûts de modélisation et de calcul.

Si la théorie des plaques isotropes est relativement bien comprise, la modélisation des plaques stratifiées peut être réalisée par différentes approches. Pour cela [Carrera, 2003, Auricchio *et al.*, 2010] proposent une classification générale des différents modèles.

---

1. Un lecteur voulant en savoir plus sur les différents modèles plaques pourra se référer à [Auricchio *et al.*, 2010, Carrera, 2003]

Ainsi trois grandes approches conduisant au développement d'un modèle plaque sont distinguées :

- L'approche continue : cette approche consiste à se baser sur une formulation 3D et à travailler soit avec des éléments 3D dégénérés [Wung, 1997], soit sur des surfaces de Cosserat [Neff, 2004].
- L'approche asymptotique : on effectue un développement limité dans l'épaisseur et on néglige les termes de plus haut degré [Ciarlet et Destuynder, 1979]. Cette théorie fonctionnant bien pour des plaques minces [Sutyrin et Hodges, 1996].
- L'approche axiomatique : la méthode la plus courante, il s'agit de postuler une allure des déplacements ou les contraintes afin de résoudre le problème.

De plus, chacune de ces grandes approches, peut être résolue par une formulation en déplacement, en contrainte ou mixte [Destuynder et Salaun, 1995, Daghia *et al.*, 2008, Carrera et Demasi, 2002, Touratier, 1991, Lure, 1964] ; et pour le cas des plaques stratifiées, il est possible soit de ne considérer qu'une seule couche équivalente (ESL « Equivalent Single Layer »), soit d'élaborer une théorie considérant chaque couche séparément (LW « Layer-wise »). Tous ces ingrédients peuvent donc donner lieu à des théories nombreuses et variées.

On s'intéresse en particulier ici aux approches axiomatiques, car ce sont les plus développées et les moins coûteuses à mettre en œuvre dans le cadre des plaques stratifiées.

Dans un premier temps, les modèles dits « classique » sont rappelés, ainsi que leurs limitations. La partie suivante expose quelques modèles d'ordre supérieur permettant d'améliorer les solutions de plaques isotropes ou de plaques stratifiées.

### 1.1.1.1 Les modèles classiques monocouche

Les modèles dits « classiques » sont les modèles de Kirchhoff-Love et de Reissner-Mindlin qui supposent une section droite indéformable, avec une contrainte supplémentaire de perpendicularité au plan moyen dans le premier cas. Leurs extensions aux plaques stratifiées sont respectivement « Classic Laminate Theory » (CLT) et « First Shear Deformation Theory » (FSDT). Ces modèles rentrent naturellement dans la catégorie ESL, la plaque est considérée homogène.

Ces théories sont mixtes, les hypothèses de base portent à la fois sur le déplacement, par une section rigide, mais aussi sur les contraintes, par une hypothèse de contrainte normale transverse négligeable. Ici, on développe en particulier la seconde, la première étant considérée comme un cas particulier pour  $h \rightarrow 0$ .

Afin d'illustrer et d'introduire les notations, on pose le problème suivant : Soit une plaque stratifiée occupant la région  $\Omega$  :

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{R}^3 / z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], (x, y) \in \Sigma_m \subset \mathcal{R}^2 \right\} \quad (1.1)$$

où le plan  $z = 0$  représente la surface moyenne ( $\Sigma_m$ ) de la plaque non déformée. L'épaisseur  $h$  est supposée petite devant les autres dimensions.

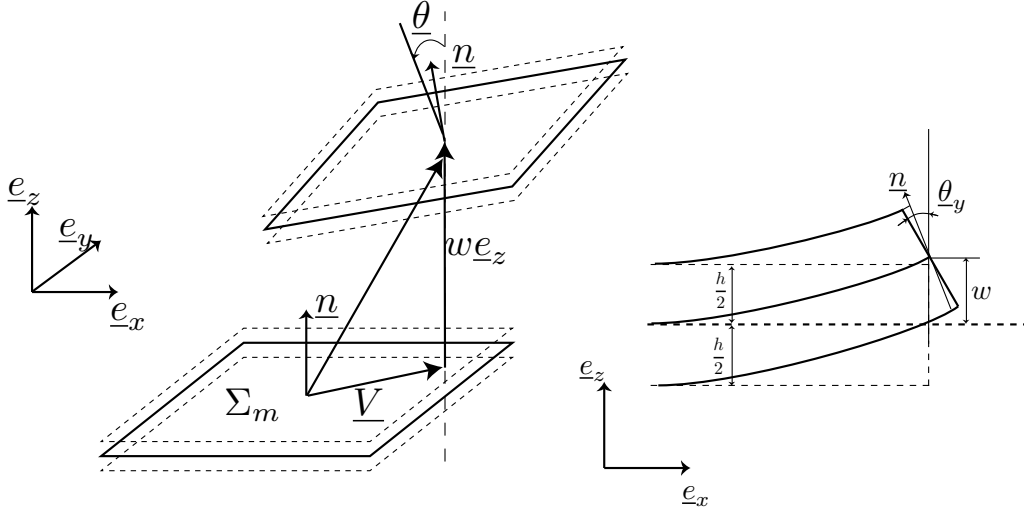


FIGURE 1.1 – Schématisation du déplacement plaque.

Les plaques stratifiées sont constituées d'un empilement de  $n$  plis (couches) dans l'épaisseur. Ces plis sont eux-mêmes constitués de fibres orientées dans une direction privilégiée, ainsi chaque pli peut être modélisé par un comportement élastique orthotrope. Afin d'optimiser la structure vis-à-vis du chargement imposé, les empilements sont souvent réalisés en empilant les plis selon différentes orientations. Dans la suite pour les expressions matricielles on privilégie une base  $(x, y)$  fixe du plan moyen de la plaque,  $\underline{z}$  est la normale à la plaque.

L'hypothèse de base du modèle FSDT est que la section reste droite et rigide au cours de la déformation. Le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{U}(m, z) = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \wedge \underline{\Theta} = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \begin{bmatrix} \theta_y(m) \\ -\theta_x(m) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

avec  $\underline{V}(m)$  le déplacement dans le plan,  $w(m)$  le déplacement transverse,  $\theta_y(m)$  et  $\theta_x(m)$  les rotations de la section FIG. 1.1. Le tenseur de déformation peut alors s'exprimer :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\gamma}} + z\underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{\epsilon}}_c \quad (1.3)$$

avec

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{grad}}_s(\underline{V}(m)) = \begin{pmatrix} V_{x,x} & \frac{1}{2}(V_{x,y} + V_{y,x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(V_{x,y} + V_{y,x}) & V_{y,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{grad}}_s(\underline{\Theta}(m)) = \begin{pmatrix} \theta_{y,x} & \frac{1}{2}(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) & -\theta_{x,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_y + w_{,x} \\ 0 & 0 & -\theta_x + w_{,y} \\ \theta_y + w_{,x} & -\theta_x + w_{,y} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$\underline{\underline{\gamma}}$  est le tenseur de déformation de membrane,  $\underline{\underline{\chi}}$  est le tenseur de courbure et  $\underline{\underline{\epsilon}}_c$  est la déformation de cisaillement hors plan.

Dans la suite, on considère uniquement la partie plane de ces champs et on conserve la notation  $\underline{\underline{\gamma}}$  et  $\underline{\underline{\chi}}$ . Aussi on remplace la notation de (1.6) par  $\underline{b}$  défini par :

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \theta_y + w_{,x} \\ -\theta_x + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

*Remarque.* Dans le champ de déplacement présenté ici,  $\epsilon_{zz}$  associé au déplacement plaque est nul (hypothèse de Reissner-Mindlin). Cette propriété incorrecte est corrigée par le biais de la relation de comportement plane associée à l'hypothèse  $\sigma_{zz} = 0$ .

La cinématique de Kirchhoff-Love est un cas particulier dans lequel la section droite reste perpendiculaire au plan moyen, on a alors  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ . Par conséquent les relations supplémentaires à appliquer pour passer d'un modèle à l'autre sont  $\theta_y + w_{,x} = 0$  et  $-\theta_x + w_{,y} = 0$ . Les rotations sont « substituées » par le gradient du déplacement transverse, cette propriété requiert une régularité supérieure sur ce déplacement ( $w \in H^2(\Sigma_m)$ ), entraînant que d'un point de vue numérique la théorie de Kirchhoff-Love est peu utilisée.

Pour une plaque stratifiée composée de  $n$  plis orthotropes superposés<sup>2</sup>, la relation de comportement dans un pli  $k$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^{(k)} &= \mathbb{K}^{(k)} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} + \mathbb{A}_h^{(k)} \epsilon_{zz} \\ \underline{\underline{\sigma}}_c^{(k)} &= \underline{\underline{\zeta}} \mathbb{B}^{(k)} \underline{b} \\ \sigma_{zz} &= C^{(k)} \epsilon_{zz} + \text{Tr}(\mathbb{A}_h^{(k)} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Où  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{A}_h$ ,  $C$  sont des caractéristiques matériau du pli  $k$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{pmatrix} \\ \mathbb{B} &= \begin{pmatrix} 2G_{13} & 0 \\ 0 & 2G_{23} \end{pmatrix} \\ \mathbb{A}_h &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

On introduit alors la notion de raideur en contraintes planes, en supposant que  $\sigma_{zz} = 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^{(k)} &= \mathbb{K}_{cp}^{(k)} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \mathbb{K}^{(k)} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} - \frac{\mathbb{A}_h^{(k)}}{C^{(k)}} \text{Tr}(\mathbb{A}_h^{(k)} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}) \\ \underline{\underline{\sigma}}_c^{(k)} &= \underline{\underline{\zeta}}^{(k)} \mathbb{B}^{(k)} \underline{b} \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. Ici, la relation de comportement est présentée dans un cas général de plaque stratifiée, le cas monocouche est juste une restriction en considérant  $n = 1$ .



où  $\mathbb{K}_{cp}^{(k)}$  est la matrice de raideur en contraintes planes.  $\mathbb{B}^{(k)}$  est la matrice de raideur en cisaillement.  $\underline{\underline{\zeta}}$  est un tenseur du 4<sup>e</sup> ordre contenant des facteurs de correction du cisaillement, qui est représenté par :

$$\underline{\underline{\zeta}} = \zeta_{11} \Phi^1 \odot \Phi^1 + \zeta_{22} \Phi^2 \odot \Phi^2 + \zeta_{12} (\Phi^1 \odot \Phi^2 + \Phi^2 \odot \Phi^1) \quad (1.11)$$

où

$$\Phi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

et  $(\Phi^i \odot \Phi^j) \mathbb{B}^{(k)} = \Phi^i \mathbb{B}^{(k)} \Phi^j$ .

Dans ce modèle, la déformation de cisaillement  $\underline{b}$  est constante dans la section, par conséquent  $\underline{\sigma}_c^{(k)}$  est constant par couches. Or d'après les conditions de continuité aux interfaces et les conditions limites sur la surface supérieure et inférieure, les contraintes de cisaillement doivent respecter les conditions de continuité suivantes :

$$\underline{\sigma}_c^{(k+1)}(z_k) - \underline{\sigma}_c^{(k)}(z_k) = 0 \quad (1.13)$$

$$\underline{\sigma}_c(\pm \frac{h}{2}) = 0 \quad (1.14)$$

Ainsi, les facteurs de correction sur le cisaillement permettent de corriger la solution, établissant une équivalence entre la distribution dans l'épaisseur des contraintes transverses produite par le modèle, et des contraintes transverses compatible avec les conditions limites et les équations d'équilibre. Cette équivalence est prise en sens énergétique.

Une technique pour prendre en compte ces hypothèses mixtes est d'utiliser la formulation variationnelle de type Hellinger-Reissner. Dans le cas isotrope ces facteurs de correction valent  $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 5/6$ ,  $\zeta_{12} = 0$ . Dans le cas de plaques stratifiées, les méthodes sont plus complexes à mettre en œuvre. Les travaux de Whitney [Whitney, 1973] montrent que l'on ne peut obtenir ces facteurs de correction analytiquement uniquement dans des cas restreints, notamment parce que ces facteurs dépendent directement de l'état de contraintes dans la plaque, formant donc un problème non-linéaire.

Certains auteurs ont proposé des approches itératives [Noor et Peters, 1989, Auricchio et Sacco, 1999, Rolfes et Rohwer, 1997], où l'on compare l'énergie obtenue par le modèle plaque et celle obtenue par une reconstruction 3D des contraintes. Une autre approche, utilisée par [Yu, 2005], consiste à optimiser le modèle par une approche asymptotique 1D dans l'épaisseur. L'hypothèse de base consiste à supposer des gauchissements dans l'épaisseur, les résoudre par développement asymptotique 1D (logiciel VAPAS) ; puis une minimisation des moindres carrés trouve ensuite le modèle Reissner-Mindlin avec les paramètres optimaux.

Afin de fermer la relation de comportement, les quantités statiques sont définies par

des efforts résultants :

$$\begin{aligned}\underline{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\tilde{\sigma}} dz \\ \underline{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \underline{\tilde{\sigma}} dz \\ \underline{Q} &= \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}_c dz\end{aligned}\tag{1.15}$$

La relation entre les efforts résultants et les déformations est obtenue en substituant (1.8) dans (1.15) :

$$\begin{pmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\zeta} \mathbb{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ \underline{\chi} \\ \underline{b} \end{pmatrix}\tag{1.16}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mathbb{K}_{cp}^{(k)} & \mathbb{C} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \mathbb{K}_{cp}^{(k)} \\ \mathbb{D} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \mathbb{K}_{cp}^{(k)} & \mathbb{H} &= \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mathbb{B}^{(k)}\end{aligned}\tag{1.17}$$

où  $z_k$  représente la position de la  $k$ -ième couche.

La relation (1.16) montre deux aspects jouant un rôle important dans les plaques stratifiées : d'abord le couplage tension/flexion au travers de la matrice  $\mathbb{C}$ , couplage qui s'anule dans le cas d'un empilement symétrique, et ensuite la dépendance de l'effort de cisaillement  $\underline{Q}$  vis-à-vis des coefficients de correction en cisaillement, qui n'est pas aisé de trouver par les méthodes précédemment décrites.

Cette hétérogénéité dans l'épaisseur fait aussi apparaître des changements brutaux de comportement entre les couches, qui provoquent des déplacements en zig-zag et des discontinuités de contrainte normale. Le respect de la continuité des déplacements, et des contraintes transverses est un point important pour le développement de théories multicouches efficaces. Les théories classiques ne répondant pas à ces critères, des modèles plus évolués ont été proposés.

### 1.1.1.2 Théories d'ordre supérieur et multicouches

De nombreuses plaques stratifiées sont constituées de plis à fibres continues ayant un comportement élastique orthotrope, dont les rapports d'orthotropie, d'après [Carrera, 2000, Rohwer et Rolfes, 1998, Rolfes et Rohwer, 1997], se situe dans la gamme suivante :

$$\begin{aligned}E_L/E_T = E_L/E_z &\sim 5 \text{ à } 40 \\ G_{LT}/E_L = G_{TT}/E_L &\sim 1/10 \text{ à } 1/200\end{aligned}\tag{1.18}$$

Cette forte anisotropie conduit à des contraintes de cisaillement transverse relativement importantes par rapport au cas isotrope, et c'est pourquoi une attention particulière

est accordée à la modélisation des contraintes  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$ , et qui n'est possible dans les modèles plaques que par l'introduction de nouvelles hypothèses.

Dans cette section, seules quelques théories d'ordre supérieur sont évoquées. Celles-ci peuvent être soit basées sur un « enrichissement » cinématique des hypothèses plaques, soit intégrées par des hypothèses mixtes, qui ont principalement pour but de supprimer le besoin de coefficient de correction.

Pour le cas des plaques homogènes, une première amélioration de la méthode FSDT proposée par [Reddy, 1984]. Le champ de déplacement prend la forme :

$$\begin{aligned} u_x(m, z) &= u_x^0 + \left(z + \frac{4z^3}{3h^2}\right)\phi_{xz} - \frac{4}{3h^2}z^3 \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \\ u_y(m, z) &= u_y^0 + \left(z + \frac{4z^3}{3h^2}\right)\phi_{yz} - \frac{4}{3h^2}z^3 \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \\ u_z(m, z) &= u_z^0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec  $(u_x^0, u_y^0, u_z^0)$ , les translations dans le plan moyen de la plaque et  $(\phi_{xz}, \phi_{yz})$  les rotations autour de  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_x$  respectivement.

La variation avec les termes du 3<sup>e</sup> ordre en déplacement permet une description quadratique des contraintes de cisaillement transverse et ainsi la vérification des conditions limites sur la face supérieure et inférieure  $\underline{\sigma}_c(\pm h/2) = 0$ . De plus ce champ a l'avantage de posséder le même nombre de degrés de liberté que la méthode FSDT. Cependant pour rester dans le cadre classique, Reddy choisit de ne pas introduire de nouveaux efforts généralisés ce qui rend l'application de ce modèle délicate.

Une formulation consistante de ce modèle de 3<sup>e</sup> ordre est donné dans [Reddy, 1990a], où l'auteur propose la forme du champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u_x(m, z) &= u_x^0 - z \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + f(z)\phi_{xz} + \lambda z^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} + \gamma z^3 \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)\right) \\ u_y(m, z) &= u_y^0 - z \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + f(z)\phi_{yz} + \lambda z^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} + \gamma z^3 \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial \theta_z}{\partial y}\right)\right) \\ u_z(m, z) &= u_z^0 + z^2 \theta_z \end{aligned} \quad (1.20)$$

où  $f(z) = \left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$ .

Avec ce modèle, Reddy montre que suivant les hypothèses faites sur les fonctions :  $\phi_{xz}$ ,  $\phi_{yz}$ ,  $\psi_z$ ,  $\theta_z$  et  $f(z)$ , toutes les théories du 3<sup>e</sup> ordre peuvent être contenues dans la formulation (1.20).

Contrairement à certains modèles, cette formulation autorise une déformation transverse  $\epsilon_{zz}$  non nulle ce qui apporte une information importante dans le cas des plaques épaisses.

Les méthodes monocouches précédentes fonctionnent bien lorsque l'on considère des plaques épaisses, ou bien lorsque l'on peut considérer une homogénéisation dans l'épaisseur (Equivalent Single Layer).

Cependant, si l'on s'intéresse aux contraintes transverses dans le cas des plaques stratifiées, ce type de modèle ne fonctionne plus. En effet les fonctions introduites sont supposées régulières, et conduisent à des déformations transverses continues entre les plis, ce qui n'est pas toujours le cas dans une plaque stratifiée. Certains auteurs proposent alors des théories multicouches (Layer-Wise), dont certaines sont simplement basées sur un empilement de modèles monocouches, et en assurant entre chaque pli les conditions de continuité :

- Compatibilité : continuité des déplacements entre les plis,
- Équilibre : équilibre des contraintes transverses.

Un historique de ces diverses méthodes est donné dans [Carrera, 2002, Carrera, 2003].

La théorie de Reddy du 3<sup>e</sup> ordre peut ainsi être étendue à des cas de plaques stratifiées en prenant par exemple le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} u_x(m, z) &= u_x^0(m) + U(m, z) \\ u_y(m, z) &= u_y^0(m) + V(m, z) \\ u_z(m, z) &= u_z^0(m) \end{aligned} \quad (1.21)$$

où les fonctions  $U$  et  $V$  sont constituées d'une combinaison linéaire dans l'épaisseur de fonctions définies par :

$$\begin{aligned} U(m, z) &= \sum_{j=1}^n U_j(m) \phi^j(z) \\ V(m, z) &= \sum_{j=1}^n V_j(m) \phi^j(z) \end{aligned} \quad (1.22)$$

où les inconnues par plis sont  $U_j$  et  $V_j$ , et les  $\phi_j$  sont des fonctions continues par pli, apparentées à des fonctions de formes élément fini.

L'avantage de cette approche est que les déplacements et contraintes sont mieux décrits dans l'épaisseur, cependant l'obtention des contraintes 3D est toujours à effectuer par reconstruction dans l'épaisseur et intégration dans l'épaisseur.

Cet inconvénient est en partie résolu par l'utilisation d'une formulation mixte de ces plaques multicouches, du type Hellinger-Reissner pour [Carrera et Demasi, 2002, Demasi, 2006], ou Hu–Washizu dans [Auricchio et Sacco, 2003, Auricchio et Sacco, 1999]

Ces deux types de formulations permettent d'ajouter des inconnues en efforts comme degrés de liberté supplémentaires. Ainsi le post-traitement est simplifié puisque les contraintes 3D recherchées peuvent être directement exprimées dans la solution.

Par exemple, [Auricchio et Sacco, 2003] proposent de faire l'hypothèse que les contraintes transverses sont quadratiques par morceaux dans l'épaisseur et d'intégrer cette hypothèse directement dans une formulation mixte.

La forme supposée des contraintes de cisaillement dans la section est alors :

$$\tau^k = t_0^k \frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} - z_k} + t_0^{k+1} \frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k} - t^k (z_{k+1} - z)(z - z_k) \quad (1.23)$$

En prenant  $t_0^1 = t_0^{n+1} = 0$  pour prendre en compte les surfaces libres sur la face supérieure et inférieure. On ajoute ainsi 2 degrés de liberté par pli :  $t_0^k$  qui représente la contrainte à l'interface entre deux plis, et  $t^k$  pour la courbure.

En utilisant l'équilibre des contraintes dans l'épaisseur, les auteurs montrent aussi qu'il est possible de réécrire les contraintes transverses en supprimant les degrés de liberté ajoutés par pli, et ainsi d'avoir une formulation indépendante du nombre de plis. Dans cette approche la détermination du coefficient de correction en cisaillement est effectué à travers une approche itérative. Une approche similaire ne nécessitant plus de coefficient de correction est proposée dans [Kim et Cho, 2007].

Par ailleurs, des approches uniquement développées pour le cas de plaque stratifiée et appelées « Zig-Zag theories » ont également été proposées. L'appellation « zig-zag » provient de la forme prise par le déplacement plan dans la section. Une extension de l'approche FSDT dans ce cadre est proposée par Murakami [Demasi, 2005] :

$$\begin{aligned} u_x^k(m, z) &= u_x^0(m) + z\phi_{xz}(m) + \xi_k(-1)^k D_x(m) \\ u_y^k(m, z) &= u_y^0(m) + z\phi_{yz}(m) + \xi_k(-1)^k D_y(m) \\ u_z(m, z) &= u_z^0(x, y) \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $\xi_k(-1)^k D_x(m)$  et  $\xi_k(-1)^k D_y(m)$  sont deux fonctions « zig-zag », et  $\xi_k = 2z_k/h_k$  est une hauteur adimensionnée. Le terme  $(-1)^k$  permet à la solution d'alterner le sens du gauchissement entre chaque couche. Cette technique permet de modéliser la discontinuité des dérivées premières (les déformations transverses) dans l'épaisseur, voir FIG. 1.2.

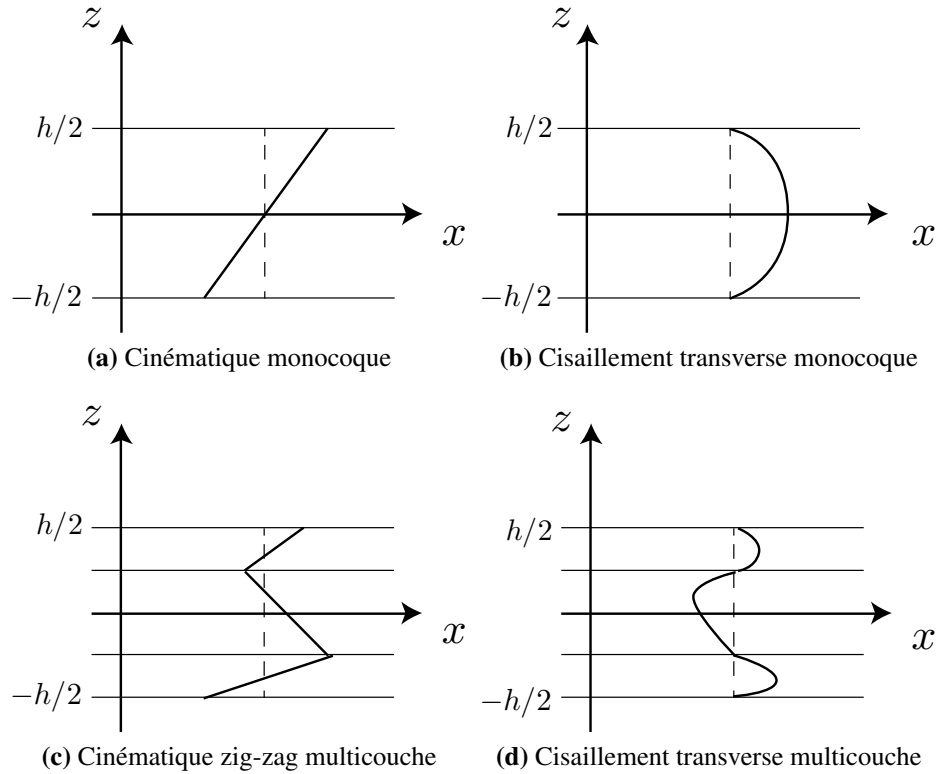
Cette approche introduit une allure quadratique des contraintes de cisaillement transverse dans chaque couche au moyen d'une formulation variationnelle mixte du type Hellinger-Reissner :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^k(m, z) &= \sigma_{xz}^{kt} F_0(z_k) + F_1(z_k) R_x^k(m) + \sigma_{xz}^{kb}(m) F_2(z_k) \\ \sigma_{yz}^k(m, z) &= \sigma_{yz}^{kt} F_0(z_k) + F_1(z_k) R_y^k(m) + \sigma_{yz}^{kb}(m) F_2(z_k) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où  $\sigma_{\alpha z}^{kt}$  et  $\sigma_{\alpha z}^{kb}$  sont les contraintes de cisaillement transverse sur la face supérieure et inférieure du pli, et  $R_x, R_y$  sont les résultantes. Les fonctions  $F_0, F_1$  et  $F_2$  représentent des polynômes permettant de respecter les équations d'équilibre locales en l'absence de forces de volume, et sont définies par :

$$\begin{aligned} F_0 &= -1/4 + \xi_k + 2\xi_k^2 \\ F_1 &= \frac{3 - 12\xi_k^2}{2h_k} \\ F_2 &= -1/4 - \xi_k + 2\xi_k^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ici la formulation en « zig-zag » ne fait qu'ajouter 2 degrés de liberté en déplacement, quel que soit le nombre de couches, mais la formulation mixte ajoute  $2(2n + 1)$  degrés de liberté correspondant aux contraintes. Afin de préserver le nombre de degrés de liberté



**FIGURE 1.2** – Représentation schématique des conditions de continuité et allures des contraintes de cisaillement dans une plaque stratifiée.

d'une formulation classique, [Carrera et Demasi, 2002] proposent une formulation faible de la loi de Hooke qui élimine des variables la contrainte de cisaillement transverse.

Un modèle alternatif également proposé par Demasi [Demasi, 2006], consiste à prendre en compte l'hypothèse de continuité entre les plis par condensation statique (à la manière des méthodes de décomposition de domaine). La continuité du cisaillement transverse entre éléments n'est plus assurée de façon exacte, cependant les coûts de calcul sont alors réduits de façon importants.

On peut aussi remarquer que certains travaux ont cherché à réduire les hypothèses faites sur les déplacements en introduisant des fonctions de gauchissement analytiques [Rand, 1998] ou numériques [Loredo, 2012, Yu *et al.*, 2003, Yu, 2005] qui servent alors à définir un modèle plaque « optimisé » ainsi qu'une meilleure reconstruction des déplacements.

D'autres méthodes encore s'affranchissent d'hypothèse sur les déplacements. C'est le cas de [Caron et Sab, 2001], qui proposent une approche originale et itérative, basée sur une vérification des hypothèses de déformation 3D. Cette approche utilise un modèle de type Reissner-Mindlin sur lequel est appliqué des « précharges » de façon à simuler les corrections apportées par la vérification des nouvelles hypothèses. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de se passer de l'identification du facteur de correction en

cisaillement et qu'elle converge très rapidement.

- À travers ces différents travaux, les deux principales problématiques soulevées sont :
- la multiplication du nombre de degrés de liberté en fonction du nombre de couches, et particulièrement lors de l'utilisation de formulations variationnelles mixtes.
  - la recherche d'un compromis entre les hypothèses nécessaires à la réduction de modèle (hypothèse sur la forme des déplacements ou des contraintes), le coût de calcul, et la précision de la solution obtenue.

Il est donc disponible dans la littérature un grand nombre d'approches possibles pour traiter le cas de plaques stratifiées. Cependant, la plupart des modèles « évolués » sont complexes à mettre en œuvre, car ils nécessitent des formulations, des régularités et des degrés de liberté particuliers, ce qui n'est pas le point de vue d'une approche non-intrusive exploitant les modèles disponibles dans les codes industriels.

[Carrera et Demasi, 2002] évoquent d'ailleurs un couplage « global-local », où une théorie plaque est utilisée pour une première évaluation puis couplée avec un modèle plaque raffiné multicouches uniquement là où cela est nécessaire.

Ce panorama général des théories plaques montre combien il est difficile de mettre en place un modèle simple et efficace pour traiter le cas des composites stratifiés. C'est en partie pour cette raison que la plupart des travaux actuels ne portent plus sur les modèles plaques eux-même, mais directement sur des modèles 3D.

Cependant les industriels ont toujours besoin de modèles plaques pour des structures de grande taille, même si ces modèles restent simplifiés. Il existe toujours une vraie nécessité à trouver un lien efficace entre un modèle plaque et un modèle 3D pour les cas de plaques stratifiées.

## 1.1.2 Les relèvements 3D

### 1.1.2.1 Estimation de la qualité de la solution plaque

Le lien entre modèle plaque et modèle 3D a toujours été une question sous-jacente à la théorie des plaques. Les premières quantifications pouvant se trouver dans les travaux sur l'estimation de l'erreur dans les années 70 [Koiter, 1970, Simmonds, 1972].

Koiter a été le premier à avoir proposé une estimation en  $h^2/L^2$  de cette erreur pour la solution de Kirchhoff-Love en isotrope et en considérant uniquement la solution intérieure. Par la suite, ces travaux ont été étendus aux cas des coques et des coques non-linéaires [Ladevèze, 1976a, Ladevèze, 1976b].

Les premiers travaux concernant la validité des cas de plaques avec effets de bord sont proposés par [Ladevèze, 1987, Ladevèze et Pecastaings, 1988]. Ladevèze et Pecastaing ont alors proposé une version optimale de la théorie de Reissner-Mindlin avec correction des effets de bord, conduisant dans le cas des plaques isotropes à une erreur en  $h^2/L^2$ . On peut noter que le point de vue développé dans ces travaux est différent du point de vue classique. En effet dans cette théorie, le coefficient de correction de cisaillement est optimisé de façon à ce que la correction des effets de bord puisse être calculée à l'ordre deux. Une difficulté supplémentaire est que pour obtenir une solution à l'ordre 2, il faut

au préalable « nettoyer » la solution plaque de Reissner-Mindlin de son effet de bord artificiel. Dans le cas isotrope, le coefficient de correction trouvé est très proche de 5/6 [Ladevèze et Pecastaings, 1988]. La généralisation à des plaques orthotropes conduit à des coefficients de cisaillements différents, que l'on peut trouver dans [Ladevèze, 1987].

### 1.1.2.2 Reconstruction 3D à partir de solution plaque

Un autre aspect de ces techniques de relèvement est qu'elles peuvent aussi être utilisées pour un post-traitement des quantités plaque afin d'obtenir les quantités 3D correspondantes.

Une reconstruction 3D des contraintes est relativement aisée. De nombreux auteurs utilisent une intégration de la relation d'équilibre dans l'épaisseur, ce qui leur permet de retrouver successivement les contraintes planes, de cisaillement et transverse.

Si on suppose qu'il n'y a ni d'effort volumique ni d'effort surfacique sur la face supérieure et inférieure, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \underline{0} \quad (1.27)$$

qui peut se décomposer en une partie plane  $\underline{\tilde{\sigma}}$ , et une partie transverse  $\underline{\sigma}_{c,z}$

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}\underline{\tilde{\sigma}} + \underline{\sigma}_{c,z} &= 0 \\ \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}_c) + \underline{\sigma}_{zz,z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

En intégrant les équations (1.28) dans l'épaisseur on a :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_c(z) &= \int_{-h/2}^z \underline{\text{div}}\underline{\tilde{\sigma}}(\xi) d\xi \\ \underline{\sigma}_{zz}(z) &= \int_{-h/2}^z \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}_c)(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette méthode, bien que simple à réaliser en post-traitement, nécessite un champ de contraintes suffisamment régulier pour être appliqué, dérivable deux fois dans le plan.

Pour pallier le manque de régularité des contraintes, des techniques de lissage des contraintes peuvent être utilisées [Carrera, 2000, Daghia *et al.*, 2008, Ubertini, 2004].

[Rohwer et Rolfes, 1998] proposent une méthode pour diminuer la régularité requise en supposant deux modes de flexion utilisant l'hypothèse  $\frac{\partial M}{\partial \alpha} = Q_\alpha$ . Le post-traitement ne nécessite alors plus que des fonctions de forme dérivables une fois.

Parallèlement, la reconstruction d'un champ de déplacement 3D est nettement moins aisée que celle en contrainte. Cette reconstruction venant pour la plupart des méthodes en complément du champ de contrainte, et ne peut pas toujours s'effectuer de façon exacte.

Ainsi, les cas où l'on peut obtenir analytiquement les gauchissements sont assez rares. Cependant quelques auteurs ont proposé des méthodes permettant de les évaluer.



En général, ces auteurs considèrent que le champ de déplacement peut se décomposer en deux termes. Le premier correspondant à la cinématique classique d'une section  $\underline{U}_s$ , et le second au gauchissement  $\underline{v}(x, y, z)$  qui prend des formes variées :

$$\underline{U}(m, z) = \underline{U}_s(m) + \underline{v}(m, z) \quad (1.30)$$

La détermination de  $\underline{v}(m, z)$  peut s'effectuer par différentes méthodes :

- soit par une analyse asymptotique des équations d'équilibres [Yu *et al.*, 2003, Yu, 2005] ;
- soit par des hypothèses cinématiques et statiques [Rand, 1998, Loredo, 2012].

Dans [Rand, 1998], pour l'application à des poutres composites, l'auteur suppose un gauchissement plan qui s'ajoute aux déformations classiques.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_x - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \Psi_{,x} \\ \gamma_{xz} &= y\phi_{,x} + \Psi_{,z} \\ \gamma_{xy} &= -z\phi_{,x} + \Psi_{,y} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ce gauchissement est déterminé analytiquement dans quelques cas particuliers, où l'on peut voir l'influence du matériau mais aussi de la géométrie de la section.

Dans des travaux récents sur des plaques stratifiées, [Loredo, 2012] a introduit des fonctions de gauchissements plan dans la formulation du déplacement :

$$\begin{aligned} u_x(m, z) &= u_x^0(m) - zw_x(m) + \sum_{\alpha=(x,y)} \phi_{x\alpha} \gamma_{\alpha 3}^0(m) \\ u_y(m, z) &= u_y^0(m) - zw_y(m) + \sum_{\alpha=(x,y)} \phi_{y\alpha} \gamma_{\alpha 3}^0(m) \\ u_z(m, z) &= u_z^0(m) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Cette hypothèse de déplacement introduit quatre fonctions de gauchissements à déterminer qui sont « paramétrées » par le cisaillement transverse.

Il est montré que les fonctions hyperboliques obtenues permettent de retrouver la théorie de Reddy (1.19) dans les cas où la plaque est mince. Dans le cas de plaque isotrope, les fonctions de gauchissements sont déterminées par résolution d'équations différentielles. La résolution de ce système d'équations dépend de l'état de contrainte dans la plaque ainsi que des coefficients de correction en cisaillement. Dans le cas de plaques stratifiées orthotropes, des hypothèses supplémentaires doivent être faites, et leurs choix ne sont pas aisés et sont discutables. Par ailleurs une optimisation des paramètres utilisés est effectuée par une méthode des moindres carrés.

Une méthode alternative, utilisée par [Yu *et al.*, 2003, Yu, 2005] propose de découpler par une méthode asymptotique le problème 3D, en un problème non-linéaire 2D, et un problème 1D linéaire correspondant à une ligne normale à la surface. L'intérêt est de conserver la modélisation d'une théorie de Reissner pour le modèle 2D mais avec une relation de comportement obtenue par résolution d'un problème 1D. Cette approche numérique, permet par ailleurs de calculer les opérateurs nécessaires lors du post-traitement pour obtenir les contraintes, déplacements et déformations 3D.

On peut décomposer la méthode en 4 étapes :

1. Écriture de la formulation asymptotique 3D,
2. Calcul 1D dans l'épaisseur basé sur des considérations asymptotiques,
3. Calcul 2D optimisé : l'introduction de 27 inconnues supplémentaires résolues par une méthode des moindres carrés, permet de trouver le meilleur modèle de type Reissner-Mindlin au sens énergétique,
4. Post-traitement des quantités souhaitées en utilisant la solution 2D et les opérateurs et fonctions trouvées lors de l'analyse 1D.

L'avantage de cette méthode est que malgré le fait que l'analyse 1D dans l'épaisseur soit un peu complexe, elle n'est effectuée qu'une fois si la plaque ne change pas d'épaisseur ni de matériau, et les opérateurs peuvent être réutilisés partout pour effectuer le post-traitement.

Une approche différente est développée dans [Allix et Dupleix-Couderc, 2009], basée sur une technique de prédiction-correction. La cinématique initiale est classique (Kirchhoff-Love) et un premier couple déplacement/effort est calculé. Ensuite, dans une section, on compare analytiquement les contraintes obtenues par la reconstruction 3D (1.28) avec les contraintes obtenues à travers la relation de comportement (1.15).

Un déplacement correctif est ajouté de façon à corriger le terme porteur de la plus grande erreur.

Au premier ordre, il s'agit de la contrainte hors-plan  $\sigma_{zz}$ . On introduit alors un champ de déplacement transverse supplémentaire que l'on calcule de façon à annuler cette erreur. Le déplacement corrigé pour un cas de plaque isotrope en flexion est, avec  $u_z^0(m) = w(m)$  :

$$\underline{U}^{o1}(m, z) = \left( w(m) + \frac{1}{1-\nu} \left( \nu \frac{y^2}{2} - h^2 \right) \Delta_m(w) \right) \underline{z} - z \underline{\text{grad}}_m(w(m)) \quad (1.33)$$

En répétant la procédure à l'ordre 2, les contraintes à corriger sont les contraintes de cisaillement  $\underline{\sigma}_c$ . On obtient alors le déplacement :

$$\underline{U}^{o2}(m, z) = \underline{U}^{o1}(m, z) + z^3 \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \underline{\text{grad}}_m(\Delta_m(w)) \quad (1.34)$$

Pour une plaque isotrope, cette solution *a priori* à l'ordre 2, correspond en fait à la solution de Saint-Venant qui peut être trouvée par exemple dans [Lure, 1964].

Cependant, le fait que cette forme de la solution obtenue à partir de la solution plaque coïncide avec la solution de Saint-Venant, ne veut pas dire que la solution déduite de la théorie des plaques en appliquant cette formulation coïncide aussi avec la solution 3D [Ladevèze, 1980, Pecastaings, 1987]. En effet, comme discuté précédemment, la solution plaque est définie à l'ordre  $\frac{h}{L}$ , à cause des conditions limites aux bords approchées associées à la solution de Kirchhoff-Love, qui introduisent à l'intérieur de la plaque une erreur en  $\frac{h}{L}$ . Cette erreur est ensuite répercutée lors de la reconstruction, ce qui fait que si l'on ne tient pas compte des effets de bord, la reconstruction à l'ordre 2 est donc illusoire.

Dans [Ladevèze, 2002, Ladevèze, 1998] une solution exacte des plaques en flexion est proposée, mais le calcul numérique par cette méthode requiert soit des éléments finis

d'ordre 4 [Sanchez *et al.*, ], soit des éléments de degré 2 avec des conditions limites particulières [El Fatmi et Zenzri, 2004, El Fatmi et Zenzri, 2002], soit encore un calcul 3D [Baranger *et al.*, 2005, Allix *et al.*, 2006]. L'intégration de ce type d'approche au sein de logiciels est donc limitée. De plus la même technique est applicable pour des plaques stratifiées mais cela ne peut être mené qu'à l'ordre deux.

À la vue de ces différents travaux sur la reconstruction de solution 3D, la question de la reconstruction des contraintes est plus développée que celle de la reconstruction des déplacements.

Outre le fait que la reconstruction des déplacements est plus complexe, les ingénieurs sont souvent plus intéressés par une meilleure estimation des contraintes dans la plaque que par l'allure du déplacement qui au final apparaît servir uniquement pour enrichir la cinématique ou pour déterminer l'erreur dans le modèle plaque.

Cependant, les théories plaques sont mixtes, et l'obtention des déplacements ne peut s'effectuer sans reconstruction des contraintes, et réciproquement, les contraintes ne peuvent être exactes que si le champ de déplacement est exact. Cette dernière propriété est probablement la plus délicate à obtenir étant donné que la plupart des modèles plaques ne prennent pas en compte la perturbation introduite par les effets de bord dans la solution intérieure.

### 1.1.3 Les effets de bords et solution de St Venant

On a vu que dans certains cas, la solution 3D est accessible par un relèvement en post-traitement d'une solution plaque. Cependant, on observe sur des modèles 3D qu'il apparaît une bande au voisinage du bord dans laquelle la solution est radicalement différente de la solution au cœur de la plaque.

La plupart des théories qui ont développé un relèvement à partir d'un modèle plaque ne peuvent alors plus s'appliquer, car ces « effets de bord » ne peuvent être capturés que par une solution 3D. On considère que la solution 3D peut se décomposer sous la forme :

$$U^{3D} = U^{SV} + U^b \quad (1.35)$$

où  $U^{SV}$  correspond à une solution de type Saint-Venant, et  $U^b$  est une solution évanescence correspondant aux effets de bords.

#### 1.1.3.1 La solution de Saint-Venant dans les plaques

Le principe de Saint-Venant est la base de nombreuses méthodes et réflexion concernant le calcul des effets de bord. Une littérature fournie est déjà disponible, entre autres [Maisonneuve, 1971, Horgan et Knowles, 1983, Ladevèze, 1983].

Ce principe exprime que suffisamment loin des bords et des zones d'application des efforts, et en l'absence de forces intérieures, la solution intérieure ne dépend plus des distributions exactes de ces chargements, mais uniquement de leurs résultantes et moments.

Ainsi dans le cas des poutres ou des plaques, la solution intérieure ne dépend que du torseur des actions mécaniques au point considéré et pas de la manière dont il est appliqué

sur les bords. Ce principe peut parfois être validé par une approche analytique où l'on recherche le minimum d'énergie, comme dans [Sternberg et Knowles, 1966] pour le cas de poutre. Il est montré que la solution de Saint-Venant est bien la solution minimale en énergie pour les cas de traction, torsion et flexion pure ; pour la flexion simple ce n'est le cas que si le coefficient de Poisson est nul.

Pour les plaques uniformes chargées uniquement sur leurs bords l'ensemble de travaux trouvent une cohérence complète dans les travaux de [Pecastaings, 1985] où le principe de Saint-Venant est vu comme une forme d'orthogonalité entre la solution de Saint-Venant et la solution d'effet de bord. Les conditions de cette localisation des contraintes et des déplacements s'en déduisent alors. On note que dans le cas d'irrégularités des bords ces solutions doivent être complétées par des solutions singulières.

Dans une approche de décomposition asymptotique, [Gol'Denveizer et Kolos, 1965] a montré que la théorie classique de Kirchhoff-Love était le terme principal de la solution intérieure d'une plaque mince. Le même résultat a été constaté dans [Gregory et Wan, 1985], où les termes d'ordres élevés de la solution intérieure exigent plus que simplement la résultante et le moment au bord de la plaque. Cependant le terme principal reste lui identique à une théorie type Kirchhoff-Love. Il est aussi exprimé qu'il est difficile d'aller au-delà d'un développement en  $O(h/L)$  si l'on ne tient pas compte de la zone de bord, ce qui est un résultat particulièrement important à noter.

### 1.1.3.2 Les effets de bords

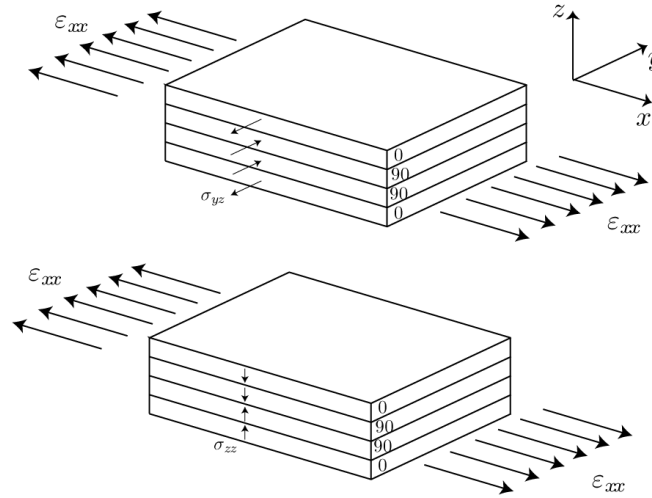
Pour les plaques composites Pipes et Pagano [Pipes et Pagano, 1970] ont été les premiers à utiliser des méthodes numériques pour calculer le transfert des contraintes par cisaillement à proximité des bords. Cela a donné lieu à de nombreux travaux dont une partie est résumée dans [Mittelstedt et Becker, 2004].

Un exemple simple pouvant exhiber les effets de bord libres dans les plaques stratifiées est le cas d'une plaque en traction, composée d'un empilement symétrique de 4 plis représentés FIG. 1.3. Les bords libres provoquent un rééquilibrage différent des contraintes de la solution intérieure. Une allure des contraintes  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zz}$  est représentée sur la FIG. 1.4.

Généralement la profondeur de pénétration de l'effet de bord est de l'ordre de l'épaisseur pour les cas de plaques isotropes. Les milieux anisotropes et stratifiés peuvent quant à eux avoir une longueur de décroissance des effets de bords plus grande [Tullini *et al.*, 1997, Horgan, 1982, Wang et Choi, 1982]. Le calcul de ces solutions singulières dans le cas de plaques stratifiées peut être trouvé dans [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987]. Pour les plaques stratifiées à grand nombre de plis, obtenu à partir d'une séquence d'empilement, une technique de calcul asymptotique des effets de bord est proposée par [Dumontet, 1986].

Pour le calcul d'effet de bord en vue de la prédiction de l'amorçage du délaminage, [Caron *et al.*, 2006, Diaz *et al.*, 2007] ont proposé différentes approximations de la solution 3D en utilisant des théories multicouches plus ou moins raffinées.

Le bord libre produit une singularité des contraintes, classiquement décomposée selon les fonctions propres de Papkovitch-Fadle, dont [Choi et Horgan, 1978] établit l'appli-



**FIGURE 1.3** – Schématisation des effets de bord sur un cas de traction avec 4 plis orthotropes  $(0^\circ/90^\circ)_s$ .

cation aux plaques composites.

Par ailleurs, dans un développement asymptotique, [Gregory et Wan, 1984, Tullini *et al.*, 1997] ont montré que sur une plaque semi-infinie, un développement asymptotique peut se séparer en deux parties : une partie intérieure où le terme dominant est la solution de Kirchhoff-Love, et une partie proche du bord, qui dépend fortement des conditions appliquées sur le bord du domaine.

La détermination des conditions limites à imposer sur un modèle plaque qui ne produit pas d'effet de bord perturbant la solution intérieure est un thème qui a donné lieu à de nombreux travaux, notamment [Gregory et Wan, 1984] où, à partir de considérations sur la décroissance des effets de bords (Decaying Analysis Method) et du Théorème de Maxwell-Betti, des conditions limites ne perturbant pas la solution intérieure sont données dans le cas d'une plaque semi-infinie isotrope. [Buannic et Cartraud, 2001] étend ces travaux aux plaques hétérogènes.

D'autres approches peuvent aussi être utilisées dans le calcul d'effet de bord : numériquement avec des fonctions de bord spécifiques, ou par des fonctions analytiques [Pecastaings, 1985], ou encore par décomposition de Fourier sur des cas de plaques trouées [Allix, 1989]. On peut aussi citer les travaux de [Lindemann et Becker, 2000] qui utilisent des éléments de frontière et obtiennent ainsi de manière assez efficace les effets de bord. Cependant, la résolution de ces problèmes de bord est souvent un problème à part, et relativement indépendant du calcul plaque. Les techniques employées sont radicalement différentes des techniques plaques classiques.

Ainsi, les travaux sur les effets de bord nous indiquent que si l'on cherche une reconstruction 3D près ou sur un bord, on s'attend à observer des erreurs, d'une part parce que le modèle plaque n'est pas adapté, mais aussi parce que la solution 3D y est particulière.

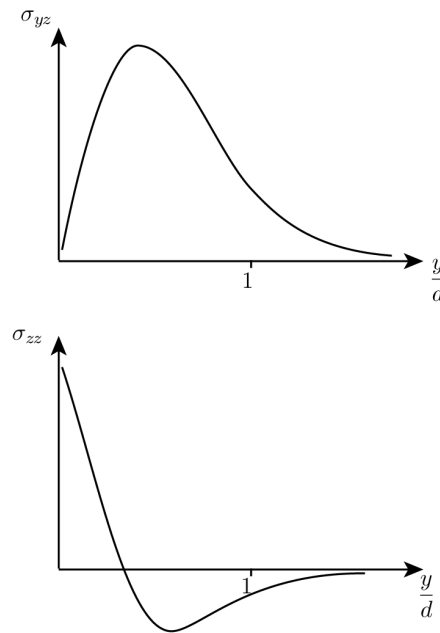


FIGURE 1.4 – Allure des contraintes  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zz}$  en s'éloignant du bord libre.

Dans la suite des développements, on évitera donc autant que possible les raccords proches des bords libres, et on ne s'intéressera qu'à un raccord dans des zones régulières, c'est-à-dire là où une solution de Saint-Venant est prépondérante.

## 1.2 Méthodes de raccord et de couplage global/local

Un problème majeur lors du calcul éléments finis des pièces industrielles est que la représentation précise des détails géométriques et des phénomènes non-linéaires localisés conduirait à des calculs de très grandes tailles, incompatibles avec les délais de l'ingénierie, voire impossibles à traiter. Une philosophie classique pour contourner cette difficulté est d'essayer de séparer ce qui peut être analysé de manière locale de ce qu'il est nécessaire de traiter de façon globale.

On distingue trois grandes catégories de techniques de couplage, fonctions de la nature du couplage recherché et des modèles considérés.

Lorsque le modèle local est défini à une échelle bien séparée de celle de la structure, souvent à partir de quelques cellules répétées, un choix intéressant est d'utiliser des techniques d'homogénéisation, éventuellement corrigées localement par des enrichissements de la solution. Par essence ces méthodes demandent un accès assez bas niveau au logiciel de calcul.

Si en revanche le modèle local est très circonscrit, par exemple une redéfinition de la géométrie ou du comportement, les approches dites « descendantes », comme le *sub-modelling*, sont beaucoup plus simples à implémenter et peuvent donner une informa-

tion suffisante. Le « patch » local est alors post-traité indépendamment du calcul initial avec comme condition limite une information issue du calcul global. Ce type d'approche convient bien au cadre non-intrusif souhaité, mais peut entraîner des erreurs relativement importantes.

Enfin, pour les phénomènes circonscrits dont les effets à l'échelle globale ne doivent pas être négligés, il est nécessaire de mettre en place un couplage fort entre les modèles. La mise en œuvre monolithique d'un tel modèle couplé est souvent complexe mais l'usage d'un solveur itératif permet de réduire voire éliminer l'intrusivité de la méthode.

### 1.2.1 Méthodes d'homogénéisation et d'enrichissement

Les techniques d'homogénéisation permettent de prendre en compte une microstructure pour définir un comportement macroscopique. Le cadre typique est celui d'une cellule locale (micro) répétée un grand nombre de fois pour constituer une zone d'intérêt. L'objectif est par des calculs locaux de caractériser le comportement macroscopique mais également, de conserver une connaissance fine des phénomènes locaux qui ont souvent des conséquences globales (par exemple l'endommagement localisé peut entraîner la ruine d'une structure).

On trouve notamment deux approches pour intégrer un comportement local dans un modèle global, la première par homogénéisation du comportement matériau, la seconde par un enrichissement des fonctions de formes éléments finis.

#### 1.2.1.1 Homogénéisation multi-niveaux

L'homogénéisation sur deux niveaux FE<sup>2</sup> de [Feyel et Chaboche, 2000] a été introduite pour simuler l'endommagement dans des matériaux composites. Cet endommagement est un phénomène difficile à introduire directement dans une relation de comportement homogénéisée, aussi les auteurs définissent un comportement « macro » à l'aide d'une relation de comportement trouvée grâce à un calcul éléments finis « micro », basée sur une cellule représentative du matériau (le Volume Élémentaire Représentatif, VER).

Le transfert « micro » vers « macro » repose sur une moyenne, ainsi la contrainte macro est définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^G = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \underline{\underline{\sigma}}^L(x) d\Omega \quad (1.36)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^L(x)$  représente le champ de contrainte dans le VER  $\omega$ .

Pour le transfert « macro » vers « micro », on résout un problème éléments finis sur la cellule en cherchant le déplacement sous la forme :

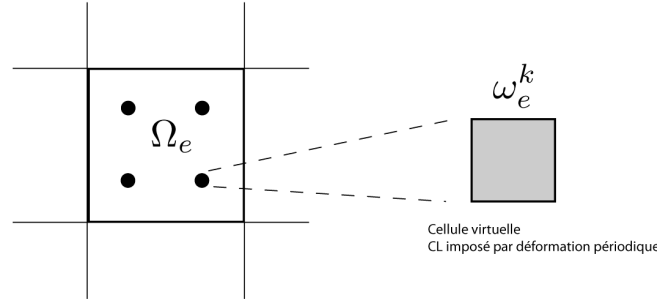
$$\underline{u}(x) = \underline{u}^p(x) + \underline{\underline{\epsilon}}^G \cdot x \quad (1.37)$$

avec  $\underline{\underline{\epsilon}}^G$  la déformation macroscopique et  $\underline{u}^p(x)$  un champ de déplacement périodique inconnu sur la cellule.

Une résolution locale est nécessaire par point de Gauss du modèle global situé dans la zone où l'on souhaite redéfinir le comportement FIG. 1.5, ce qui peut donner lieu à



des échanges de données et des coûts de calcul très importants si cette zone est de grande taille.



**FIGURE 1.5** – Pour l’élément  $\Omega_e$  le comportement aux points de Gauss est obtenu par un calcul local basé sur une prédéformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^G$ .

Cependant le point faible de cette technique est qu’elle repose sur l’hypothèse d’homogénéisation périodique. Les échelles doivent être bien séparées, il n’y a pas d’interaction directe entre cellules locales.

Ainsi la méthode devient moins pertinente lors du non respect de la condition de périodicité, typiquement près des bords du domaine ou dans les zones où les gradients des grandeurs macroscopiques ont une longueur caractéristique de l’ordre de la taille du VER. Par exemple dans le cas du délaminage, cette approche doit être complétée par des traitements dédiés.

En pratique, les calculs sur les VER sont de petite taille et complètement indépendants, ils peuvent être effectués en parallèle. L’homogénéisation multi-niveaux peut être considérée comme relativement non-intrusive, en effet certains codes éléments finis permettent la définition de comportements matériaux par l’utilisateur, par exemple les UMAT d’ABAQUS. Par exemple dans [Guinard *et al.*, 2002], le logiciel DSDM est utilisé localement pour trouver la relation de comportement homogénéisée à intégrer dans un modèle global ABAQUS.

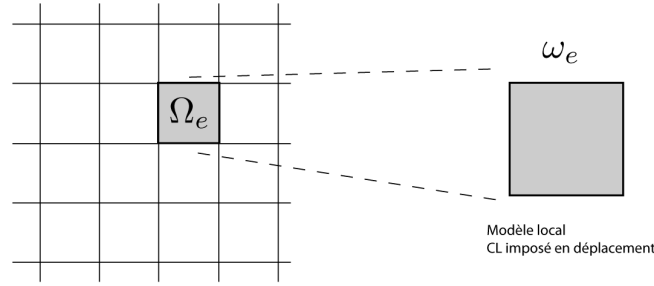
Lorsque les effets ne sont plus strictement locaux, ou lorsque la périodicité du problème local n’est plus vérifiée, l’application directe de la méthode  $FE^2$  est remise en question. Dans [Ibrahimbegovic et Markovic, 2003], il est proposé d’établir directement une homogénéisation des quantités discrètes et de mettre en place une technique itérative. On forme alors des problèmes locaux non-linéaires et un problème global, lui aussi non linéaire, de façon à assurer le transfert d’information entre les cellules ; la rigidité des éléments globaux est substituée par une rigidité homogénéisée issue d’un calcul local dit de cellule FIG. 1.6.

Après un premier calcul global linéaire, on applique pour chaque cellule les opérations suivantes :

- **Localisation**, où l’on applique sur chaque cellule le déplacement « macro » :

$$\mathbf{u}^{L,e} = \mathbf{T}_e \mathbf{u}^{G,e} \quad (1.38)$$





**FIGURE 1.6** – La rigidité d'un élément  $\Omega_e$  est substituée par la rigidité homogénéisée du modèle  $\omega_e$ , dont les conditions limites en déplacement sont interpolées à partir des déplacements globaux.

avec  $\mathbf{T}_e$  la matrice d'interpolation sur le bords de la cellule  $e$ .

- **Résolution** non-linéaire des problèmes locaux.
- **Extraction** sur les noeuds globaux de la rigidité et des forces nodales au bord de cellule :

$$\mathbf{f}^{G,e} = \mathbf{T}_e^T \hat{\mathbf{f}}^{L,e} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{K}^{G,e} = \mathbf{T}_e^T \hat{\mathbf{K}}^{L,e} \mathbf{T}_e \quad (1.40)$$

où  $\hat{\mathbf{f}}^{L,e}$  et  $\hat{\mathbf{K}}^{L,e}$  sont les forces et rigidités condensées sur le bord. Cette étape procède ainsi à une sorte d'homogénéisation des quantités discrètes qui peuvent ensuite être assemblées dans le problème global.

- Construction du nouvel opérateur global en procédant à l'assemblage des rigidités et forces élémentaires (cellule par cellule)

$$\mathbf{f}_{int}^G = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}^{G,e} \quad (1.41)$$

$$\mathbf{K}^G = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{G,e} \mathbf{L}_e \quad (1.42)$$

avec  $\mathbf{L}_e$  la matrice booléenne d'assemblage global. On effectue un calcul global avec cette rigidité et on itère la procédure jusqu'à convergence globale.

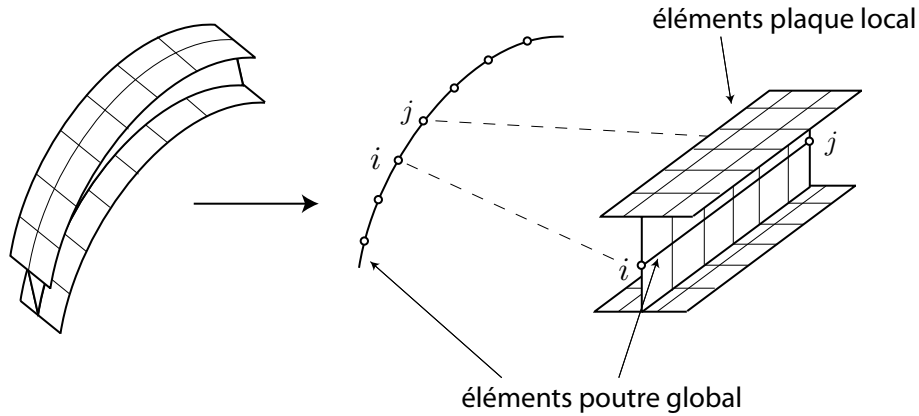
**Cas particulier des raccords entre dimensions différentes** Il est possible de trouver des extensions des méthodes d'homogénéisation aux cas de raccord entre modèles basés sur des hypothèses cinématiques différentes. Une méthode d'homogénéisation discrète similaire à celle développée par [Ibrahimbegovic et Markovic, 2003] et appliquée aux cas de couplage poutre/plaque pour traiter des cas de flambage localisé est proposée par [Erkmen, 2012] : un modèle plaque vient se superposer aux éléments poutres comme dans une procédure multi-échelle classique FIG. 1.7.

Le déplacement dans le modèle plaque  $\underline{u}^L$  est écrit sous la forme :

$$\underline{u}^L = \mathbb{N} \underline{u}^G + \underline{u}' \quad (1.43)$$

où  $\underline{u}^G$  sont les déplacements nœdaux du modèle poutre,  $\mathbb{N}$  les fonctions de projection de ces déplacements poutre sur le modèle plaque.  $\underline{u}'$  représente la différence entre les deux modèles.

La résolution s'effectue de façon itérative, le résidu  $\sigma' = \sigma^L - \sigma^G$  entre les deux modèles est contrôlé, et imposé en tant que chargement supplémentaire dans le problème global. Le raccord entre les éléments poutre et coque est de type cinématique mais avec des conditions supplémentaires particulières sur la déformation de cisaillement « macro » pour tenir compte de l'effet Poisson dans la section. Cela impose d'écrire une condition globale sur la section et limite la méthode aux comportements isotropes.



**FIGURE 1.7** – La structure de gauche est réduite à des éléments poutres et localement un modèle plaque vient s'y superposer de façon à prendre en compte le flambage.

### 1.2.1.2 Enrichissement hiérarchique

Les approches de la section précédente se concentrent sur l'établissement de modèles globaux pertinents par homogénéisation des quantités locales, mais la cinématique globale reste inchangée et peu précise. Les méthodes d'enrichissement hiérarchique cherchent à introduire dans la solution globale des termes correctifs permettant de l'améliorer au fur et à mesure du calcul.

Par exemple, un champ de déplacement global  $\underline{u}^G$  peut être enrichi par un terme correctif  $\underline{v}^L$  dans la zone d'intérêt  $\Omega_I$  par :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^G + \underline{v}^L & \text{dans } \Omega_I \\ \underline{u}^G & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_I \end{cases} \quad (1.44)$$

Les modèles sont superposés et il faut donc s'assurer de certaines propriétés :

- vérifier la continuité des déplacements sur le bord de la zone de superposition et de l'équilibre des contraintes,
- vérifier l'indépendance des deux espaces d'approximation des déplacements  $\mathcal{U}^G$  et  $\mathcal{V}^L$  sous peine de perdre l'unicité de la solution.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^G \oplus \mathcal{V}^L \quad (1.45)$$

Une première méthode appliquant ce principe est la « projection de Dirichlet homogénéisée » (HDPM) [Oden *et al.*, 1999], qui a été proposée dans le cadre de l'élasticité linéaire pour résoudre des problèmes avec une micro-structure fortement hétérogène. Le niveau global est un modèle avec un comportement homogénéisé. Au niveau local, des cellules indépendantes représentent la micro-structure, de façon analogue au schéma FIG. 1.6.

Le calcul est effectué de manière adaptative, on ne calcule pas les problèmes locaux sur toute la structure, mais seulement là où des erreurs importantes ont été identifiées, par exemple par un estimateur d'erreur. On applique ainsi les étapes suivantes :

1. on résout le problème global homogénéisé pour obtenir  $\underline{u}^G$  ;
2. à l'aide d'estimateurs d'erreur basés sur une non-vérification de la loi de comportement hétérogène, on identifie les cellules  $\omega_i$  nécessitant un calcul local ;
3. on calcule les problèmes locaux sur les cellules  $\omega_i$  sous la condition :

$$\underline{u}_i^L = \underline{u}^G \quad \text{sur } \partial\omega_i \quad (1.46)$$

4. On construit la solution assemblée :

$$\underline{u} = \underline{u}^G + \sum_i (\underline{u}_i^L - \underline{u}|_{\omega_i}^G) \quad (1.47)$$

et on vérifie *a posteriori* la solution.

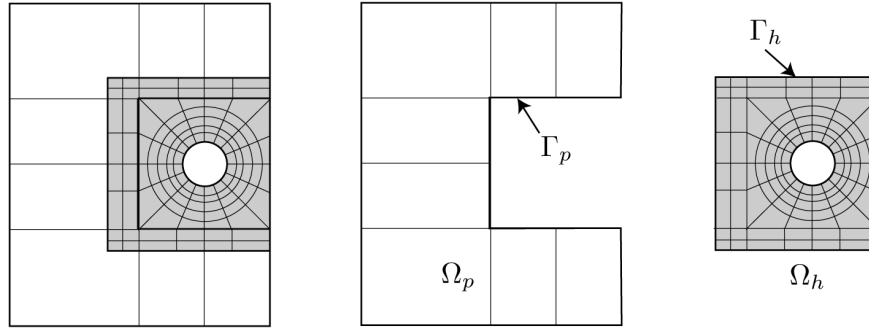
Si l'erreur n'a pas suffisamment diminué, il est possible d'ajuster la méthode en corrigeant les coefficients du matériau homogénéisé ou en augmentant la taille des domaines micro. Ces deux procédures sont coûteuses mais permettent de diminuer l'erreur sans prendre en compte d'interaction entre cellules. L'originalité de cette méthode est que la démarche d'adaptation est introduite directement au niveau de la modélisation et non pas seulement au niveau de la discrétisation.

Une autre méthode de modèles hiérarchiques est proposée par [Rank et Krause, 1997], la méthode hp-d, pour des structures comportant des détails géométriques (trous, hétérogénéités, ...) rendant la solution irrégulière dans certains endroits. Cette méthode est basée sur le constat que les détails sont mieux représentés en raffinant le maillage à leur proximité (adaptation h) alors que loin de ces détails il est possible de mettre moins d'éléments tout en augmentant leur ordre (adaptation p). La méthode s'appuie sur une formulation avec recouvrement partiel entre un modèle local  $\Omega_h$  maillé finement et un modèle global possédant des éléments d'ordre élevé  $\Omega_p$ . La solution est recherchée sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{u}_h + \underline{u}_p \quad (1.48)$$

avec la nullité des déplacements imposée sur chacun des deux bords, voir FIG. 1.8 :

$$\begin{cases} \underline{u}_h = 0 \text{ sur } \Gamma_h \\ \underline{u}_p = 0 \text{ sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (1.49)$$



**FIGURE 1.8** – Le maillage est composé d'éléments d'ordre élevé  $\Omega_p$  et est localement raffiné autour du trou  $\Omega_h$ .

Afin de s'assurer de l'indépendance des deux espaces d'approximation, le recouvrement est construit de telle sorte que les maillages ne se chevauchent pas, les degrés de liberté présents en double sont éliminés du modèle fin. Le système à résoudre se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ph} \\ \mathbf{K}_{hp} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_h \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

où les termes diagonaux  $K_{pp}$  et  $K_{hh}$  sont les matrices de rigidité classiques des deux modèles. Et les matrices  $K_{hp}$  et  $K_{ph}$  sont des matrices de couplage calculées de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_{hp} = \int_{\Omega} B_h^T \cdot H \cdot B_p d\Omega \quad (1.51)$$

$$\mathbf{K}_{ph} = \int_{\Omega} B_p^T \cdot H \cdot B_h d\Omega \quad (1.52)$$

Le système est résolu par un algorithme de Gauss-Seidel par bloc, où à chaque itération on résout un problème global (p) puis un problème local (h), les termes  $\mathbf{K}_{ph}\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{K}_{hp}\mathbf{u}_p$  s'interprètent comme des précharges provenant de l'itération précédente. On peut noter ici l'analogie avec une méthode de Schwarz avec recouvrement, la résolution se fait là aussi de manière alternée entre les deux modèles.

$$\mathbf{K}_{pp}\mathbf{u}_p^{i+1} = \mathbf{f}_p - \mathbf{K}_{ph}\mathbf{u}_h^i \quad (1.53)$$

$$\mathbf{K}_{hh}\mathbf{u}_h^{i+1} = \mathbf{f}_h - \mathbf{K}_{hp}\mathbf{u}_p^{i+1} \quad (1.54)$$

$$(1.55)$$

Les matrices de couplage n'ont pas besoin d'être calculées explicitement, seul leur produit avec le vecteur déplacement est requis. L'enrichissement hiérarchique peut ainsi se greffer autour d'un solveur classique de façon non-intrusive, sous la condition de pouvoir appliquer des prédéformations comme chargement.

*Remarque.* Dans la pratique, cette formulation hiérarchique produit des termes de couplages relativement faibles par rapport aux termes diagonaux et le système est quasiment diagonal par blocs. Le résultat obtenu par l'algorithme de Gauss-Seidel dépend donc fortement de la solution initiale.

**Cas particulier des raccords entre modèles de dimensions différentes** Il est possible de trouver des applications de la méthode d'enrichissement hiérarchique pour des cas de couplages poutre/2D ou plaque/3D [Düster *et al.*, 2007, Düster *et al.*, 2007], ou de problèmes de délaminage de plaques stratifiées [Johansen et Lund, 2009].

Un modèle hiérarchique a également été utilisé par [Fish *et al.*, 1997] pour une redéfinition 3D locale d'une plaque stratifiée, mais les éléments utilisés dans la partie locale étaient ici personnalisés pour correspondre à une cinématique imposée à l'interface.

La principale difficulté des méthodes d'enrichissement hiérarchique est le calcul des termes de couplage entre les maillages, même si ceux-ci n'ont pas besoin d'être calculés explicitement, il est nécessaire de pouvoir interpoler des déformations d'un maillage sur un autre, ce qui n'est pas toujours aisé à réaliser selon les logiciels utilisés.

Bien que pratique et performante, la méthode hp-d nécessite en général de connaître *a priori* les zones d'intérêt et de définir des modèles particuliers. De plus les résolutions alternées entre les modèles requièrent d'intégrer sur un maillage des quantités définies sur un maillage différent, ce qu'il est délicat de traiter en pratique de manière vraiment non-intrusive.

On peut cependant noter qu'une approche clairement non-intrusive a été adoptée dans [Plews *et al.*, 2011] où après un calcul global éléments finis classique, un modèle G-FEM local est calculé. Les fonctions locales trouvées servent alors à définir de manière non intrusive un modèle global enrichi.

## 1.2.2 Méthodes descendantes

Une autre classe de méthodes globales/locales couramment utilisée par les industriels est le *submodelling*, ou « zoom structural ». Ces approches sont intéressantes car faciles à mettre en œuvre. On peut identifier quatre étapes :

- Analyse globale,
- Identification de la zone d'intérêt par des estimateurs d'erreur ou des règles métier (si elle n'est pas connue *a priori*),
- Extraction des quantités nécessaires au pilotage du modèle local,
- Analyse locale.

Les approches descendantes sont particulièrement utilisées lorsqu'on souhaite avoir rapidement une estimation locale sur un problème plus global, et lorsque les modifications apportées ne sont pas trop sévères.

Les avantages par rapport aux techniques précédentes sont (i) qu'il n'est pas nécessaire de connaître *a priori* les zones de la structure à réanalyser et donc d'avoir peu de contraintes sur la génération des maillages, et (ii) que le fait de changer de modèle lo-

cal n'impacte pas la stratégie, il est assez aisé d'effectuer un calcul sur un logiciel et d'exporter les conditions limite à appliquer au modèle local dans un autre logiciel. Par contre, l'absence de retour d'information au niveau global limite fortement la précision des résultats obtenus.

### 1.2.2.1 Approche à conditions limites en déplacement

Les conditions limites les plus simples à imposer sur le modèle local (fin) d'une zone d'intérêt sont les déplacements issus du calcul global, éventuellement interpolés. Cette méthode a initialement été proposée par [Kelley, 1982], et est implémentée de façon standard dans de nombreux codes sous le nom de *submodelling*.

Il est à noter que dans le cas de maillages non-conformes (maillage local plus raffiné, éléments d'ordre supérieur), on introduit artificiellement des surcontraintes car on impose à la cinématique locale de suivre la cinématique globale.

**Cas particulier des raccords entre modèles de dimensions différentes** La pratique actuelle la plus courante pour les méthodes descendantes entre un modèle plaque et un modèle 3D est de construire un relèvement simple à partir des déplacements plaques. Ainsi le déplacement 3D est défini par :

$$\underline{U}^{3D}(m, z) = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \underline{\text{grad}}_m(w(m)) \quad (1.56)$$

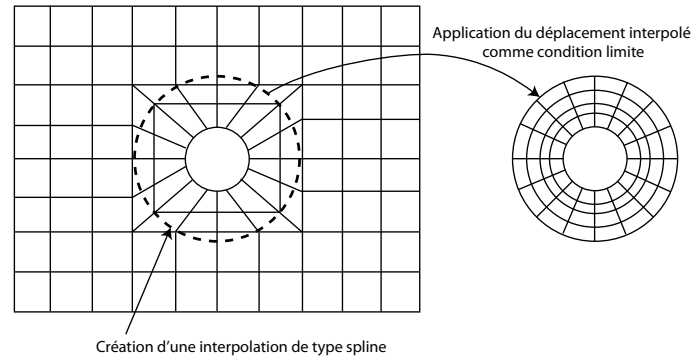
où  $\underline{V}(m)$  est le déplacement plan et  $w(m)$  le déplacement transverse. Cependant ce type de déplacement très simple provoque des effets de bords nuisibles, même dans le cas de plaques isotropes. Des détails concernant ce raccord sont donnés dans la section 2.2.1.1.

Concernant l'utilisation de maillages incompatibles, le type d'interpolation choisi pour évaluer les quantités plaques nécessite des précautions. Ainsi dans le cadre d'un couplage entre un modèle plaque et un modèle plaque plus raffiné, des interpolations variées ont été proposées : spline cubique [Cormier *et al.*, 1999], éléments finis d'ordre 2 ou plus [Mao et Sun, 1991], ou parfois spécifiques aux problèmes traités (par exemple [Ransom *et al.*, 1992] pour une plaque en flexion).

Dans [Ransom et Knight Jr, 1990], les déplacements issus du modèle global (plaque) sont interpolés sur des splines avant d'être injectés dans le modèle local (coque). Ces splines sont construites en tenant compte de l'équilibre de plaque en flexion, dont les coefficients sont déterminés par un problème de minimisation des moindres carrés. Cette approche permet d'utiliser deux maillages différents potentiellement incompatibles FIG. 1.9.

### 1.2.2.2 Approche à conditions limites en effort/raideur

Les approches de « zoom » en déplacement ont le défaut de ne pas tenir compte de la structure totale, ce qui rend leur utilisation dans des modèles non-linéaires problématique. La stratégie qui consiste à résoudre itérativement le problème en établissant une étape de correction sera détaillée dans la section 1.2.3. En alternative, il est possible d'améliorer la



**FIGURE 1.9** – Le maillage du modèle local est indépendant du maillage global.

solution locale en imposant des conditions limites en effort ou mixte (à base d'effort et de raideur).

La méthodologie de base est similaire à l'approche en déplacement :

**Identification** des faces ou arêtes du maillage local que l'on veut raccorder en effort ;

**Extrapolation** du champ de contrainte global  $\underline{\underline{\sigma}}^G$  aux points d'intégration des faces ;

**Construction** des efforts surfaciques  $\underline{\underline{\sigma}}^G \cdot \underline{n}$  à appliquer sur ces faces et on détermine le second membre correspondant.

De la même façon que les déplacements, une attention particulière doit être apportée lorsque l'on interpole les efforts globaux sur un maillage plus raffiné. En général, des techniques de régularisation des contraintes sont utilisées [Zienkiewicz et Zhu, 1992]. Elles permettent de reconstruire des conditions limites qui introduisent moins d'effets artificiels.

Ces méthodes sont en général plus délicates à mettre en œuvre dans un cadre éléments finis classique, car elles demandent de relever des forces internes. Elles sont donc moins souvent mises en pratique.

Cependant lorsque les maillages sont compatibles à l'interface, le raccord peut se réduire à imposer des efforts nodaux. On vérifie alors la condition :

$$\lambda_{\Gamma}^L + \lambda_{\Gamma}^G = 0 \quad (1.57)$$

où  $\lambda_{\Gamma}^G$  représente le vecteur de forces nodales d'interface exercées sur la zone d'intérêt par le reste de la structure, que l'on nomme aussi partie complémentaire.

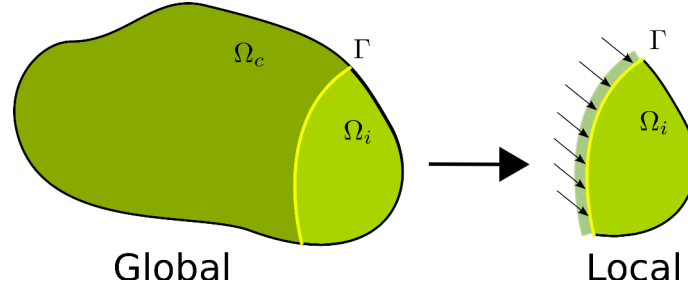
Cependant cette approche souffre du même défaut que l'approche en déplacement, en cas de modifications trop sévères de la géométrie ou du comportement, l'absence de correction globale conduit à des estimations erronées.

L'approche avec condition mixte permet d'améliorer la solution locale car à la différence des autres raccords la partie complémentaire de la structure est représentée par une rigidité d'interface.

Une méthode exploitant ces conditions mixtes a été présentée dans [Jara-Almonte et Knight, 1988], appelée « Specified Boundary Stiffness and Force », cette approche pro-

pose non seulement d'appliquer un effort mais aussi une rigidité d'interface permettant de représenter au mieux le reste de la structure.

On considère que la structure peut être décomposée en trois parties : la zone intérieure, la zone extérieure et une interface, voir FIG. 1.10.



**FIGURE 1.10** – Lors du calcul local, la zone extérieure est remplacée par sa raideur condensée à l'interface et un champ d'effort.

En écrivant le système de façon à faire apparaître les différents domaines, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^G & \mathbf{K}_{CI}^G & 0 \\ \mathbf{K}_{IC}^G & \mathbf{K}_{II}^G + \mathbf{K}_{II,I}^G & \mathbf{K}_{II,I}^G \\ 0 & \mathbf{K}_{II}^G & \mathbf{K}_{II}^G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_C^G \\ \mathbf{u}_I^G \\ \mathbf{u}_I^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_C^G \\ \mathbf{F}_{I,C}^G + \mathbf{F}_{I,I}^G \\ \mathbf{F}_I^G \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

En supposant que  $\mathbf{u}_C^G$  est une bonne approximation de la solution en dehors du domaine local et que l'on substitue les rigidités globales par les rigidités locales dans la zone d'intérêt, on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II,C}^G + \mathbf{K}_{II,I}^L & \mathbf{K}_{II,I}^L \\ \mathbf{K}_{II}^L & \mathbf{K}_{II}^L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^L \\ \mathbf{u}_I^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{I,C}^G + \mathbf{F}_{I,I}^L \\ \mathbf{F}_I^L \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{IC}^G \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_C^G \quad (1.59)$$

Le résultat peut être amélioré en remplaçant le terme en  $\mathbf{K}_{II,C}^G$  par la condensation de la rigidité de la zone complémentaire, ce qui correspond au complément de Schur  $\mathbf{S}_{G,C} = \mathbf{K}_{II,C}^G - \mathbf{K}_{IC}^G \mathbf{K}_{CC}^{G-1} \mathbf{K}_{CI}^G$ . En règle générale, l'obtention de ce complément de Schur n'est pas souhaitée car très coûteuse, on se limite alors à des approximations de cette rigidité d'interface.

Ainsi le point clé de la qualité de cette méthode est l'approximation du complément de Schur. Plusieurs auteurs en ont proposé des approximations soit en considérant une ou plusieurs bandes d'éléments à l'interface [Magoulès *et al.*, 2006] ou bien par une méthode plus originale à deux échelles [Gendre *et al.*, 2011] dans le cadre d'un raccord non-intrusif.

Plusieurs études montrent que l'approche par condition mixte induit des erreurs plus faibles qu'une approche en déplacement et est moins sensible au placement de la zone d'interface [Jara-Almonte et Knight, 1988, Gendre *et al.*, 2011]. La difficulté de ces méthodes reste l'évaluation à faible coût de l'approximation de la rigidité d'interface.

*Remarque.* Au cours de l'étude bibliographique effectuée, peu de travaux ont été observés concernant les méthodes descendantes en effort ou en raideur.



### 1.2.3 Méthodes de couplage fort

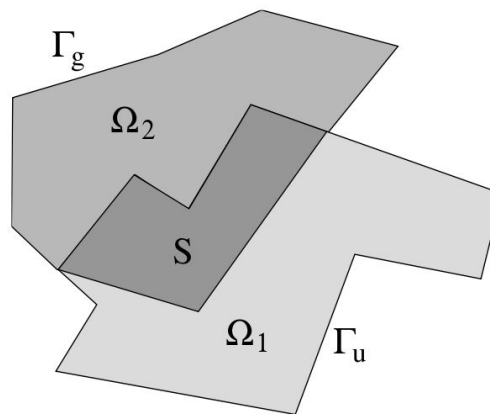
La dernière classe de méthodes de couplage concerne les cas où l'on cherche à avoir une solution pertinente autant dans la partie locale raffinée que dans la partie complémentaire. Pour cela un couplage fort est mis en place, il peut être appliqué par des méthodes directes, dites monolithiques, ou itératives, ces dernières se prêtant mieux à des mises en œuvres non-intrusives.

Les raccords forts proposent d'établir des relations entre quantités appartenant à des modèles différents. Ces relations sont souvent imposées par multiplicateurs de Lagrange. On obtient ainsi simultanément la partie locale, l'interface et la partie globale complémentaire.

#### 1.2.3.1 Raccord en volume : méthode avec recouvrement

Parmi les méthodes avec recouvrement, la « splitting-method » [Babuska et Anderson, 2005] est une variation des méthodes d'enrichissement à partir de problèmes « hand-book » pour une application non-intrusive. Les solutions locales sont « paramétrées » et viennent enrichir le problème global sans nécessiter de remaillage, par une technique d'enrichissement similaire à la méthode G-FEM.

Une autre méthode est la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998, Rateau, 2003] qui permet de coupler au sens énergétique des modèles différents. Ces modèles peuvent différer par leurs discrétisation ou par leurs formulations. Le point particulier est que les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont raccordés dans le volume dans lequel ils se superposent  $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$  FIG. 1.11. Le volume  $S$  sert de zone de transition, aussi appelé « zone de collage ».



**FIGURE 1.11** – Les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont *a priori* quelconques, ils sont raccordés de manière énergétique et en volume dans  $S$  grâce à des multiplicateurs de Lagrange et des opérateurs de projection.

Afin d'opérer le collage on définit  $\alpha$  une fonction comprise entre 0 et 1, valant 0 dans  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  et 1 dans  $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ , et qui va pondérer les modèles dans la zone de collage ; la

formulation Arlequin d'un problème d'élasticité linéaire est la suivante :

$$\begin{aligned}
 &\text{Trouver } (\underline{u}^1, \underline{u}^2, \underline{\lambda}) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times \mathcal{M}(S) \text{ tels que : } \forall (\underline{u}^{1*}, \underline{u}^{2*}) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \times \mathcal{M} \\
 &\int_{\Omega} (1 - \alpha) \underline{\sigma}(\underline{u}^1) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^{1*}) = \int_{\Omega} (1 - \alpha) \underline{f}_d \underline{u}^{1*} d\Omega + \int_{\Gamma_g} (1 - \alpha) \underline{F}_d \underline{u}^{1*} dS + \langle \underline{\lambda}, \underline{u}^{1*} \rangle \\
 &\int_{\Omega} \alpha \underline{\sigma}(\underline{u}^2) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^{2*}) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha \underline{f}_d \underline{u}^{2*} d\Omega + \int_{\Gamma_g} \alpha \underline{F}_d \underline{u}^{2*} dS - \langle \underline{\lambda}, \underline{u}^{2*} \rangle \\
 &\langle \underline{\lambda}^*, \underline{u}^1 - \underline{u}^2 \rangle_S = 0
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

avec  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  le produit de dualité dans  $H^1(S)$ . L'espace de multiplicateur de Lagrange  $\mathcal{M}$  est appelé espace médiateur, c'est un paramètre de la méthode.

Aucune hypothèse n'est faite *a priori* sur les modèles, il est donc possible de coupler des problèmes de natures différentes (mécanique moléculaire / milieu continu) ou de dimension différentes (plaque / 3D). Des « patchs » locaux sont construits aux endroits que l'on désire raffiner ou modifier.

La méthode Arlequin nécessite cependant un choix concernant l'espace médiateur et la pondération à apporter entre les deux modèles. Ce choix n'est pas forcément trivial à trouver *a priori* et impacte la solution couplée finale.

Si le modèle résultant est traité de façon monolithique, cela conduit à un coût de calcul important pour les structures de grande taille avec comportement non-linéaire. Il est toutefois possible d'associer cette approche avec des techniques de décomposition de domaine et des solveurs itératifs qui permettent alors de paralléliser la résolution [Elkhodja *et al.*, 2007, Pebrel *et al.*, 2007].

**Cas particulier des raccords entre modèles de dimensions différentes** Il est possible de trouver des exemples d'application de la méthode Arlequin à quelques cas de raccord plaque/3D [Dhia *et al.*, ], cependant la détermination des paramètres de couplage (espace de couplage, choix de pondération) est sujet à discussion [Rateau, 2003].

### 1.2.3.2 Raccord en surface : méthode sans recouvrement

Dans le cas où les modèles ne se recouvrent pas mais sont juste adjacents, on effectue un raccord en « surface ». C'est ce type de raccord que l'on trouve dans les méthodes de décomposition de domaine primales comme la méthode BDD [Mandel et Brezina, 1993], duales comme la méthode FETI [Farhat et Roux, 1991] ou encore mixte comme avec la méthode LATIN [Ladevèze *et al.*, 2001]. Deux cas se présentent en général, soit un maillage est réalisé puis décomposé, ce qui donne lieu à des maillages compatibles qui sont relativement simples à traiter. Soit le domaine est décomposé puis maillé, ce qui peut produire des maillages incompatibles. Ce dernier cas a conduit à la mise en place de techniques de raccord comme la méthode *mortar* [Bernardi, 1994], où l'on définit une surface maître et une surface esclave ; la continuité des déplacements est imposée au sens faible à l'aide d'un champ de multiplicateurs de Lagrange supporté par les fonctions de forme de la surface esclave.

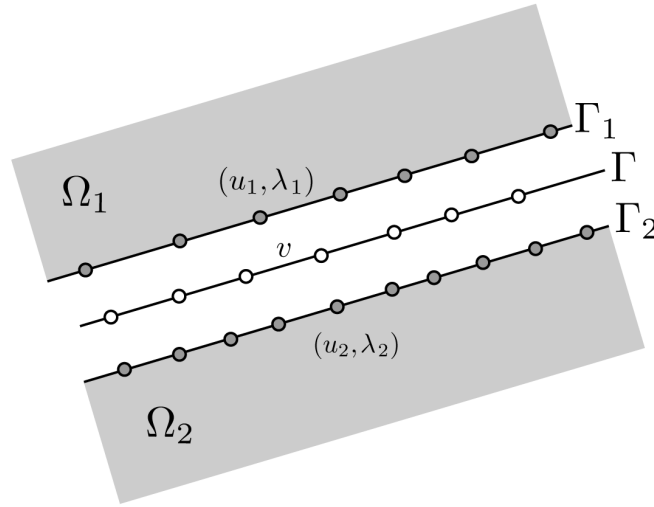


FIGURE 1.12 – L'interface comporte une discrétisation indépendante des deux domaines.

La notion de maître/esclave implique une hiérarchie dans la description des modèles ce qui n'est pas toujours souhaitable. Des formulations hybrides à trois champs ont été proposées par [Ransom *et al.*, 1992, Park et Felippa, 2000] dont un schéma est représenté FIG. 1.12.

On définit la partition suivante de l'énergie potentielle totale du système :

$$\Pi = \Pi_{\Omega_1} + \Pi_{\Omega_2} + \int_{\Gamma} \lambda_1 \cdot (v - u_1) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_2 \cdot (v - u_2) d\Gamma \quad (1.61)$$

où  $\Pi_{\Omega_1}$  et  $\Pi_{\Omega_2}$  sont les énergies potentielles de chaque sous-domaine,  $v$  est le déplacement de l'interface et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les champs des multiplicateurs de Lagrange définis de chaque côté de l'interface. À l'équilibre, on a alors les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_j = \sigma \cdot n_j & (j = 1, 2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_j = v & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (1.62)$$

L'inconvénient de cette méthode est que le système obtenu n'est pas toujours défini positif et possède une grande largeur de bande. Sa résolution peut donc nécessiter un traitement particulier.

**Cas particulier des raccords entre modèles de dimensions différentes** Une approche originale développée dans [Blanco *et al.*, 2008] propose un couplage surfacique entre domaines possédant des hypothèses cinématiques différentes. L'idée est d'avoir une formulation variationnelle sur un domaine  $\Omega$  dans lequel certaines zones possèdent un espace cinématique plus réduit.

Soit  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  avec  $\Omega_1$  le support d'une formulation avec des hypothèses cinématiques plus strictes, soit  $\Gamma$  l'interface entre les deux domaines, et  $\Gamma_{Di}$  le bord du domaine

$i$  sur lequel on applique un déplacement imposé  $\bar{u}_i$ , on note  $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  l'espace cinématique où

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \{u_1 \in H^1(\Omega_1); u_1|_{\Gamma_{D1}} = \bar{u}_1\} \\ \mathcal{U}_2 &= \{u_2 \in H^1(\Omega_2); u_2|_{\Gamma_{D2}} = \bar{u}_2\}\end{aligned}\quad (1.63)$$

La formulation variationnelle sur deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sans chargements surfacique ou volumique s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } ((u_1, u_2), t_1, t_2) &\in \mathcal{U}_d \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \\ \int_{\Omega_1} \sigma_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega &= \gamma \int_{\Gamma} t_1 \cdot (v_1 - v_2) d\Gamma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma} t_2 \cdot (v_1 - v_2) d\Gamma \\ &+ \gamma \int_{\Gamma} s_1 \cdot (u_1 - u_2) d\Gamma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma} s_2 \cdot (u_1 - u_2) d\Gamma \\ \forall ((v_1, v_2), s_1, s_2) &\in \mathcal{U}_d^0 \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)\end{aligned}\quad (1.64)$$

où  $\gamma \in [0, 1]$  un paramètre de raccord, et  $t_1$  et  $t_2$  les efforts à l'interface entre les domaines.

Soit  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)}$  l'espace des déplacements d'interface (espace trace),  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_2)}$  étant par hypothèse plus riche que  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)}$ , on peut définir un espace  $\mathcal{W}$  tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_2)} &= \mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)} \oplus \mathcal{W} \\ \mathcal{W} &\perp \mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)}^*\end{aligned}\quad (1.65)$$

Le déplacement à la frontière  $u_2|_{\Gamma}$  est alors décomposé en deux parties :

$$\begin{aligned}u_2|_{\Gamma} &= u_{2_1} + u_{2_r} \\ u_{2_1} &\in \mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)} \\ u_{2_r} &\in \mathcal{W}\end{aligned}\quad (1.66)$$

Ainsi le déplacement  $u_{2_r}$  n'induit pas de travail dans  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)}^*$ , on peut considérer qu'il s'agit d'une sorte de gauchissement dans la section  $\Gamma$ .

Le choix du paramètre  $\gamma$  détermine dans quel espace s'exprime la continuité  $u_1 = u_2$  :

$$\gamma = 1 \rightarrow u_1 = u_2 \text{ dans } \mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)} \quad (1.67)$$

$$\gamma \neq 1 \rightarrow u_1 = u_2 \text{ dans } \mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_2)} \quad (1.68)$$

Dans le cas  $\gamma = 1$ , la continuité est vérifiée dans l'espace  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_1)}^*$ , c'est à dire au sens des efforts généralisés, et on autorise un gauchissement arbitraire  $u_{2_r}$  qui ne transmet pas d'effort. Pour  $\gamma \neq 1$  la continuité est vérifiée dans l'espace  $\mathcal{T}_{\Gamma(\mathcal{V}_2)}^*$ , donc plutôt au sens des contraintes 3D, et  $u_{2_r} = 0$ .

La méthode proposée par Blanco est ainsi générale et propose un cadre mathématique pour le couplage entre domaines possédant des descriptions cinématiques différentes. La méthode proposée est celle d'un système fortement couplé mais elle peut être appliquée à

deux sous-systèmes par une méthode itérative [Leiva *et al.*, 2010]. Cependant la création des opérateurs de projection utilisés dans les produits de dualité peut être délicate dans le cas de plaques stratifiées et est intrusive de manière générale.

Une technique plus pragmatique et plus simple à appliquer au sein de code industriel est proposée par Mc Cune [McCune *et al.*, 2000]. Celle-ci est basée sur un équilibre du travail à l'interface et utilise une expression analytique des contraintes dans l'épaisseur. Cela permet ainsi d'écrire directement des relations sur les degrés de liberté qui peuvent alors être facilement implémentées dans un code éléments finis. Par exemple, dans le cas d'un raccord 1D/2D sur une poutre isotrope, les contraintes dans la section s'écrivent :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I} \quad (1.69)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (1.70)$$

où  $A$  et  $I$  sont l'aire et le moment d'inertie de la section,  $h$  l'épaisseur (coordonnée  $z$ ).  $N$ ,  $M$  et  $Q$  sont les efforts poutre. L'équivalence en travail entre les deux modèles s'écrit alors :

$$\Pi = Pu_x^P + Qu_z^P + M\theta^P = \int_A \sigma_{xx} U_x^{3D} + \sigma_{xz} U_z^{3D} dA \quad (1.71)$$

$$= \int_A \left(\frac{P}{A} + \frac{Mz}{I}\right) U_x^{3D} + \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) U_z^{3D} dA \quad (1.72)$$

on identifie alors par les efforts généralisés les relations :

$$u_x^P = \frac{1}{A} \int_A U_x^{3D} dA \quad (1.73)$$

$$u_z^P = \frac{3}{2A} \int_A \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) U_z^{3D} dA \quad (1.74)$$

$$\theta^P = \frac{1}{I} \int_A z U_x^{3D} dA \quad (1.75)$$

Ces relations imposent de façon faible le déplacement des nœuds du modèle 2D, et sont implémentées par des MPC (MultiPoints Constraints). Cette approche provient des méthodes de réduction de modèle utilisées par les industriels et des méthodes de réduction de dimension à partir de pièces réalisées en CAO [Donaghy *et al.*, 1996, Donaghy *et al.*, 2000], et a été appliquée à des cas 1D/3D [Monaghan *et al.*, 1998], 1D/plaque et 2D/3D [Shim *et al.*, 2002] sur des matériaux isotropes.

L'inconvénient des méthodes précédentes est l'ajout d'inconnues supplémentaires par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange. Dans certains cas, l'ajout de ces inconnues supplémentaire introduit des problèmes d'instabilité aux interfaces.

Les méthodes de Nitsche ont été initialement proposées comme alternative à l'application de condition de Dirichlet faible. Cette méthode remplace alors la formulation duale

avec multiplicateur de Lagrange par une formulation primale, proche d'une formulation par pénalisation.

La formulation d'un problème de couplage par une méthode de Nitsche se présente de la façon suivante, en reprenant les notations définies plus haut et en notant  $\llbracket \bullet \rrbracket = \bullet_1 - \bullet_2$  et  $\{\bullet\} = \gamma \bullet + (1 - \gamma) \bullet$  avec  $\gamma \in [0, 1]$ .

Trouver  $(u_1, u_2) \in \mathcal{U}_d$  tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\Gamma} \alpha \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\Gamma - \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^2 \rrbracket \cdot (1 - \Pi^1) \{\mathbf{v}\} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^2\} d\Gamma = l(\mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{U}_d^0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Avec  $\tilde{a}(u, v)$  regroupant les formes bilinéaires standards des deux domaines,  $l(v)$  la forme linéaire standard,  $\alpha$  le coefficient de pénalité, et  $\Pi^1$  l'opérateur de projection dans l'espace cinématique réduit.

Par rapport à la méthode de pénalisation classique cette formulation est consistante et elle peut être symétrisée de façon à avoir des matrices possédant de bonnes propriétés.

Dans [Nguyen *et al.*, 2014], un couplage entre modèles poutre/2D ou plaque/3D utilisant cette méthode de Nitsche est proposée.

Il est notable que la formulation poutre utilisée utilise une description isogéométrique. Des NURBS sont utilisés pour calculer les fonctions de formes, il est ainsi possible de s'affranchir des degrés de liberté de rotation. La méthode de Nitsche permet donc le couplage entre modèles cinématiquement incompatibles et entre maillages non-conforme assez efficace, car l'implémentation de cette méthode est proche d'une méthode de pénalisation, on n'ajoute pas de degrés de liberté supplémentaire, on n'impose donc pas de particularité aux solveurs ni aux modèles.

Il est aussi possible de relever des travaux visant à coupler des modèles de type éléments de frontières avec des éléments coques par un couplage cinématique direct [Haas et Kuhn, 2003] ou par un couplage par travail équivalent [Helldörfer *et al.*, 2008].

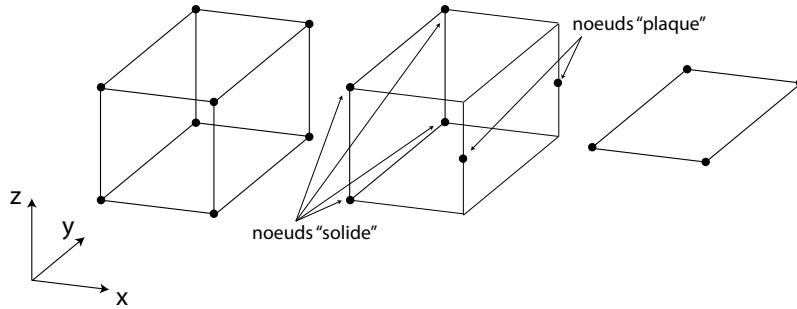
La méthode de décomposition de domaine FETI pour des domaines de dimensions différentes a été proposée par [Wyart *et al.*, 2007], la méthode de raccord est là simplement basée sur une hypothèse de déplacement plaque. On peut également citer une autre application de la méthode FETI, dans laquelle les sous-domaines ne présentant pas d'intérêt sont homogénéisés numériquement, la méthode FETI-DP micro-macro [Amini *et al.*, 2009], appliqué au couplage plaque/3D, dans cette méthode, les éléments plaque grossiers sont beaucoup plus gros que les éléments fins, les maillages sont donc incompatibles et une méthode Mortar est utilisée pour créer le raccord. Dans cette description la partie « micro » (ici un déplacement 3D non compris dans la cinématique plaque) est supposé nul en moyenne sur l'interface.

### 1.2.3.3 Raccord par éléments dédiés

Une autre approche consiste à créer des éléments de transition permettant de faire le lien entre les deux maillages. Les éléments ainsi produits sont spécifiques aux types de

modèles utilisés de part et d'autre de l'interface. En général des éléments possédants les degrés de liberté des deux domaines sont ainsi créés. La formulation « mixte » particulière des modèles plaques est prise en compte directement au niveau de l'élément.

Un exemple d'application d'élément de transition solide/plaque est donné par [Kim *et al.*, 1997]. Les éléments sont construits en mettant en vis-à-vis les nœuds solides et plaques dans un élément virtuel d'une dimension équivalente à celle d'un élément solide FIG. 1.13.



**FIGURE 1.13** – Représentation de l'élément de transition (à 6 nœuds) au centre, reliant un élément solide à 8 nœuds à un élément plaque à 4 nœuds.

L'idée est d'utiliser des éléments respectant la partition de l'unité,  $\sum_{j=1}^n N_j = 1$ , où  $n$  est le nombre de nœuds de l'élément de transition. Le vecteur déplacement s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \underbrace{\sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}}_{\text{nœuds solide}} + \underbrace{\sum_{j=m+1}^n \mathbf{N}'_j \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \\ -\theta_x \end{bmatrix}}_{\text{nœuds plaque}} \quad (1.77)$$

Ainsi, pour un nœud solide  $1 \leq j \leq m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_j = [u_j, v_j, w_j] \\ \mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.78)$$

et pour un nœud plaque  $m < j \leq n$  :

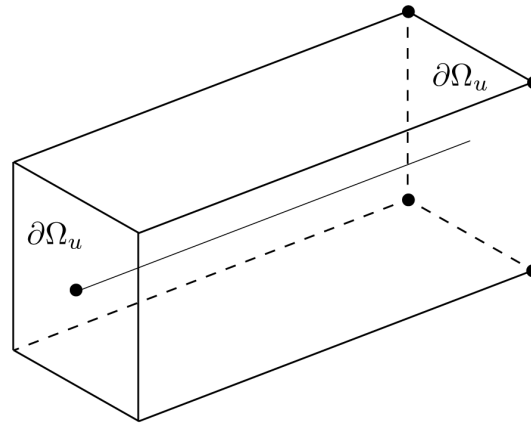
$$\begin{cases} \mathbf{U}_j = [u_j, v_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}] \\ \mathbf{N}'_j = \begin{bmatrix} N'_j & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \zeta N'_j \\ 0 & N'_j & 0 & -\frac{h}{2} \zeta N'_j & 0 \\ 0 & 0 & N'_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.79)$$

La relation de comportement discrétisée permet d'exprimer le vecteur des contraintes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (1.80)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice des déformations linéarisées et  $\mathbf{C}$  la matrice d'élasticité. Le choix de cette matrice n'est pas évident, et il n'y a pas de règle précise pour choisir une combinaison appropriée du comportement plaque et du comportement solide [Gmür et Kauten, 1993].

La plupart des éléments de transition disponibles sont basés sur une formulation en déplacement. Une approche hybride est proposée par [Garusi et Tralli, 2002] où un élément virtuellement hexaédrique est développé pour un raccord poutre/3D ou poutre/plaque. FIG. 1.14. Pour cette approche une formulation mixte d'Hellinger-Reissner est utilisée où



**FIGURE 1.14** – Élément de transition poutre/solide à cinq degrés de liberté.

l'on néglige les termes de force volumique et les efforts de surface excepté sur deux faces opposées.

On obtient alors une matrice de rigidité de la forme :

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{G}^e \quad (1.81)$$

avec

$$\mathbf{H}^e = \int_{\Omega^e} N_{\sigma_{ij}}^T C_{ijkl}^{-1} N_{\sigma_{kl}} dV \quad (1.82)$$

$$\mathbf{G}^e = \int_{\partial\Omega_u^e} [N_{\sigma_{ij}} n_i]^T N_{u_i} dS \quad (1.83)$$

où  $N_{\sigma_{ij}}$  et  $N_{u_i}$  correspondent aux fonctions de formes qui sont déterminées par identification avec des champs de Saint-Venant dans l'élément et par une cinématique poutre ou plaque suivant les cas.

Ici l'utilisation de fonctions analytiques pour la création des matrices élémentaires et la prise en compte d'une formulation mixte apportent une bonne qualité aux éléments.



Le point délicat est la construction des fonctions de forme particulières qui peut s'avérer coûteuse. De manière générale les méthodes avec éléments de transition paraissent trop particulières envers certains types d'éléments et de modèles, et sont relativement intrusives car elles nécessitent de modifier la formulation des éléments et imposent de modifier les maillages afin que ceux-ci s'adaptent aux éléments.

#### 1.2.3.4 Raccord non-intrusif par algorithme itératif

On a pu voir que, les méthodes sans recouvrement sont plus nombreuses et variées que les méthodes par raccord en volume. Cependant, même si elles peuvent sembler plus simples, elles ne sont pas toutes aisées à mettre en œuvre dans le cadre d'une résolution monolithique.

Par ailleurs, les approches purement descendantes, qui sont très pratiquées par les industriels, peuvent être mises en défaut lorsque les non-linéarités ou les raffinements locaux sont importants. Il a été observé dans [Gendre *et al.*, 2009] que bien que le raccord en déplacement produise une faible erreur sur les contraintes, des quantités non-linéaires comme la déformation plastique cumulée peuvent être très sensibles à la qualité du couplage. De même, dans le cas du flambage localisé [Cresta, 2008], des erreurs pouvant aller jusqu'à 30% sur le déplacement entre le modèle local et le modèle de référence ont été observées.

Ce problème provient principalement du fait que la structure globale ne tient aucun compte du modèle local. C'est pourquoi une amélioration directe consiste à trouver une correction à appliquer au modèle global, de façon à prendre en compte l'effet des altérations du modèle local en présence de non-linéarité ou de fortes modifications dans la structure.

Un exemple de cette démarche est proposé par [Mao et Sun, 1991] dans une méthode appelée « Refined Global/Local ». Dans le cadre d'un raffinement du maillage, elle consiste à enrichir la cinématique globale par la solution locale par une étape de « remonte ». La particularité de cette approche est qu'elle définit un nouveau problème global utilisant le même maillage mais avec une prédéformation imposée provenant du calcul local.

Pour cela, le champ de déplacement dans la structure lors de la correction, appelé « global raffiné », est exprimé par :

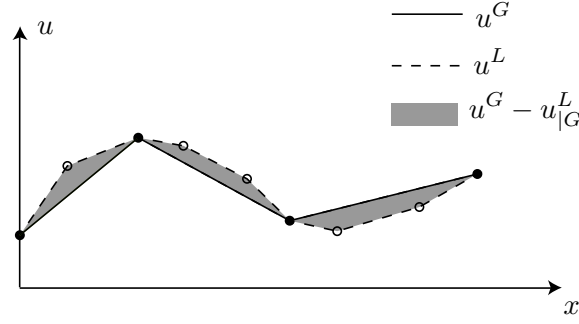
$$\underline{u}^{GR} = \underline{u}^L + (\underline{u}^G - \underline{u}_G^L) \quad (1.84)$$

Ainsi le terme  $(\underline{u}^G - \underline{u}_G^L)$  est un terme d'enrichissement représentant l'écart entre les champs de déplacement global et local FIG. 1.15.

En exprimant la déformation de ce champ « global raffiné » on obtient :

$$\underline{\epsilon}^{GR} = \underline{\epsilon}^L + \mathbf{B}^G(\underline{u}^G - \underline{u}_G^L) \quad (1.85)$$

Avec  $\mathbf{B}^G$  la matrice formée par les dérivées des fonctions de forme globale.



**FIGURE 1.15** – Champ de déplacement sur un élément non raffiné de degré 1, le champ local est une meilleure approximation car l'élément grossier est subdivisé en plusieurs éléments locaux.

En exprimant la rigidité globale par  $\mathbf{B}^{G,T} \mathbf{H} \mathbf{B}^G = \mathbf{K}^G$ , avec  $\mathbf{H}$  la matrice de Hooke, on note :

$$\mathbf{K}^G \underline{u}^{GR} = \mathbf{B}^{G,T} \mathbf{H} \underline{\varepsilon}^L + \mathbf{K}^G (\underline{u}^G - \underline{u}_{|G}^L) \quad (1.86)$$

Il est important de noter que cette approche ne s'applique directement que pour des problèmes linéaires. De cette façon on interprète la déformation locale comme une pré-déformation à appliquer dans le modèle global :

$$\mathbf{K}^G \underline{u}^{GR} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{K}^G \underline{u}^G = \mathbf{F} + \mathbf{F}^+ \quad (1.87)$$

avec  $\mathbf{F}^+ = \mathbf{K}^G \underline{u}_{|G}^L - \mathbf{B}^{G,T} \mathbf{H} \underline{\varepsilon}^L$ . On final on résout donc :

$$\mathbf{K}^G \underline{u}^{GR} = \mathbf{F} \quad (1.88)$$

$$= \mathbf{K}^G \underline{u}^G - \mathbf{F}^+ \quad (1.89)$$

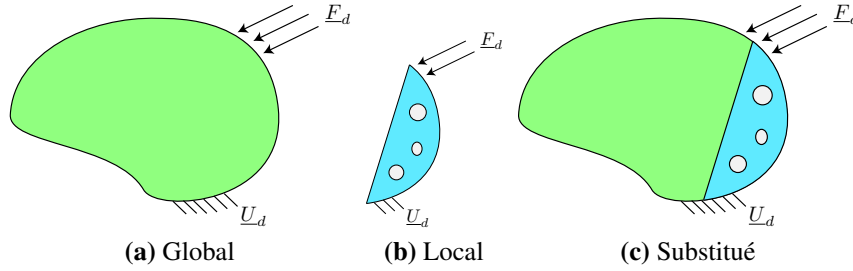
$$\underline{u}^{GR} = \underline{u}_0^G - \underline{u}_{|G}^L + \mathbf{K}^{G-1} \mathbf{B}^{G,T} \mathbf{H} \underline{\varepsilon}^L \quad (1.90)$$

$$\underline{u}^{GR} = \underline{u}_0^G - \underline{u}_{|G}^L + \mathbf{K}^{G-1} \underline{g} \quad (1.91)$$

Où  $\underline{u}_0^G$  est le champ de déplacement initial global. Le terme  $\underline{g}$  correspond à une pré-charge induite par le terme d'enrichissement, localisé dans la zone d'intérêt et calculé par intégration numérique. Concrètement il s'agit simplement d'efforts nodaux supplémentaires à ajouter au modèle global. Ainsi cette méthode ne fait que rajouter un terme au second membre (nul en dehors de la zone raffinée) à la résolution du calcul global, et on peut conserver la factorisation de  $\mathbf{K}^{G-1}$ , ce qui rend d'une certaine façon la méthode non-intrusive car on ne définit pas de nouveau maillage. Cependant, cette méthode a été développée dans le but d'obtenir une meilleure représentation des contraintes locales et des concentrations de contraintes, on ne redéfinit pas la géométrie ni le comportement (linéaire).

Une approche non-intrusive, vis-à-vis des maillages et des codes a été proposée par [Whitcomb, 1991] dans le cadre d'une redéfinition locale de géométrie. Une méthode

de type quasi-Newton est employée entre un problème global, représentant la structure globale et un problème local contenant la modification de la géométrie. Cette méthode itérative a été redécouverte puis améliorée dans les travaux menés au LMT-Cachan sur les approches non-intrusives par L. Gendre, O. Allix et P. Gosselet [Gendre *et al.*, 2009], où elle est appliquée à une redéfinition de géométrie et de modèle avec introduction de plasticité locale FIG. 1.16.



**FIGURE 1.16** – Schématisation du modèle Global et Local, et du modèle Substitué, vers lequel on converge.

La stratégie comporte les phases suivantes, après un premier calcul global initial :

1. On effectue une analyse locale, avec comme condition limite  $u_\Gamma$
2. On calcule le résidu, la discontinuité en effort entre les deux modèles :

$$\mathbf{r}^G = \mathbf{f}^G - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{GL} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{N}^G) d\Omega \quad (1.92)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^{GL}$  est le champ de contraintes, discontinu à l'interface et correspondant à la solution locale dans la zone d'intérêt et à la solution globale en dehors.

3. Si le résidu dépasse une certaine tolérance, on calcule alors un déplacement correctif défini par :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}^G \quad (1.93)$$

Cette mise à jour correspond à une itération de Newton-modifiée dans laquelle on réutilise la factorisation de  $\mathbf{K}^{-1}$  du premier calcul global.

Cette procédure est inspirée des techniques de Newton modifiées en élastoplasticité, et par analogie on peut en déduire certaines propriétés de convergence. Lorsque le modèle local est plus souple (présence de trous, plasticité, endommagement) la méthode converge. Par contre, si les modifications produisent une structure locale plus rigide que le modèle global de la zone réanalysée, il est nécessaire d'introduire une relaxation dans l'étape de correction, caractérisée par le coefficient  $\alpha < 1$  suffisamment petit :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}^G \quad (1.94)$$

*Remarque.* Dans la plupart des applications, il est plus pratique d'appliquer un raccord en déplacement dans l'étape de descente pour deux raisons : d'une part le modèle local

est souvent à l'intérieur d'un domaine, et appliquer des conditions limites en déplacement évite les mouvements de corps rigide. Et d'autre part l'évaluation de l'écart entre les deux modèles et la correction porte sur la quantité duale, ici des efforts nodaux qu'il est bien plus facile à appliquer car une discontinuité des efforts est autorisée<sup>3</sup>.

Dans la pratique, cette stratégie avec un raccord en déplacement est assez simple à mettre en œuvre, dans le sens où l'on ne manipule que des conditions limites d'interface sur différents modèles et on ne modifie jamais la façon dont les modèles sont générés et résolus.

Cette méthode est aussi relativement robuste, et il est possible de l'appliquer dans des cas où l'opérateur local est non-linéaire, tant que celui-ci ne provoque pas une trop grande rigidité du modèle hybride résultant. Whitcomb a montré que le résidu peut servir d'indicateur pour évaluer la convergence de la méthode, mais ce résidu ne renseigne pas sur une erreur locale d'une quantité d'intérêt quelconque. Cette approche offre la possibilité de traiter un problème couplé avec deux solveurs différents, ce qui a été appliqué dans [Gendre *et al.*, 2009] dans le cadre d'une plasticité locale en utilisant deux instances d'ABAQUS. Par ailleurs des techniques d'accélération efficaces et non-intrusives peuvent permettre d'accélérer la convergence.

Ces approches non-intrusives, commencent à être mises en avant dans divers travaux : [Bettinotti *et al.*, 2013] pour le développement d'un couplage en dynamique entre domaines possédants des pas de temps différents, couplage code déterministe/code stochastique [Chevreuil *et al.*, 2013], application à la propagation de fissure par méthode XFEM locale en réinterprétant la méthode comme une approche multigrille locale dans [Passieux *et al.*, 2013], et dans un couplage FEM/GFEM dans le cadre de calcul thermique [Plews *et al.*, 2011]. Une méthode similaire a été employée par [Lebon, 2011] pour traiter un couplage expérience-calcul numérique sur une étude d'endommagement de béton armé.

Les méthodes avec itérations permettent donc de coupler de façon non-intrusive des modèles qui peuvent être de nature très différentes. Ces méthodes nécessitent généralement plus de calculs que les méthodes avec couplage direct, mais néanmoins la convergence peut être plus rapide avec des techniques de raccords mixtes ou d'accélération de convergence [Gendre *et al.*, 2009].

Dans la suite, on utilisera une stratégie itérative similaire à celle proposée dans le cadre 3D dans [Gendre *et al.*, 2009]. Comme l'enjeu est de coupler des modèles de dimensions différentes, on va chercher à reconstruire une solution 3D à partir de la solution plaque afin d'utiliser des outils similaires à ceux précédemment mis en place.

## 1.3 Conclusion

Dans cet état de l'art, on a pu constater que le raccord non-intrusif entre un domaine plaque stratifié et un domaine 3D est un problème aux facettes multiples. D'une part les

---

3. Une correction en déplacement impliquerait un champ de déplacement discontinu dans le modèle global, et donc une partition du maillage.

techniques de couplage non-intrusives semblent une voie prometteuse car elles autorisent une grande liberté dans le choix des modèles, tout en définissant sans ambiguïté un couplage par substitution, sans paramètres dans le raccord, ni de nouveaux modèles. Même si les itérations et les résolutions successives semblent en faire une stratégie peu efficace, des méthodes d'optimisation et des raccords mixtes peuvent être mis en place, de façon à accélérer la convergence vers la solution couplée.

Un autre point important de la stratégie que l'on peut dégager est que le relèvement 3D d'une solution plaque stratifiée n'est pas trivial. En effet, pour appliquer une stratégie de couplage non-intrusive, on a besoin de relever le déplacement à appliquer au modèle 3D. Or on a vu que ce relèvement exigeait des conditions de régularités particulières, en plus de n'être exact qu'en  $O(h/L)$  ou  $O(h^2/L^2)$  dans le meilleur des cas à cause de la prise en compte approchée des conditions limites dans les modèles plaques.

L'enjeu est de faire avec ces contraintes et de tester dans un cas poutre/2D, puis plaque/3D, les différentes possibilités de raccord, tout en gardant à l'esprit le côté non-intrusif de la stratégie.

# Chapitre 2

## Pré-étude sur un raccord 1D/2D

*Ce chapitre est consacré à une pré-étude dans le cas d'un raccord 1D-2D. L'idée testée est d'utiliser un relèvement 2D de la solution 1D pour pouvoir ensuite appliquer les techniques de couplage non-intrusif pour des modèles de même dimensionnalité.*

*Le cadre simple de l'étude permet de tester de nombreuses variantes et de dégager les propriétés que devront respecter, outre la contrainte de non-intrusivité, les raccords proposés par la suite entre modèles plaque et 3D.*

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Problème et solution de référence, modélisation hybride</b>	<b>48</b>
2.1.1	Problème de référence	48
2.1.2	Définition du modèle hybride	49
<b>2.2</b>	<b>Étude des relèvements proposés</b>	<b>52</b>
2.2.1	Présentation des trois raccords	52
2.2.2	Comparaison des différents raccords dans le cas isotrope	56
2.2.3	Effets de la stratification pour le raccord plateau uniforme	59
2.2.4	Etude de l'influence de la position du raccord	60
<b>2.3</b>	<b>Première application du couplage non-intrusif</b>	<b>64</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>

Les études précédentes sur le couplage non-intrusif [Gendre, 2009, Gendre *et al.*, 2011] se situaient dans le cadre du raccord entre modèles de même dimensionnalité. Afin de pouvoir appliquer ces techniques dans le cadre où le modèle global est de dimensionnalité réduite, la solution que nous avons retenue consiste à raccorder le modèle fin avec un relèvement de la solution grossière. Ce chapitre se place dans le cadre du raccord entre un modèle poutre global et un modèle 2D local. L'objectif est de dégager les propriétés que devront respecter les raccords plaque/3D proposés par la suite pour conduire à une modélisation proche de la référence constituée par une modélisation fine de toute la structure.

La première section présente le problème de référence étudié, une poutre en flexion entièrement modélisée en 2D, et sa modélisation hybride. Le problème étant suffisamment simple pour que l'on puisse espérer qu'une approche purement descendante (*submodeling*) donne des résultats satisfaisants, divers relèvements sont ainsi testés dans la section 2 pour une poutre homogène, l'effet du positionnement de l'interface est également rapidement évalué. La section 3 montre comment l'introduction de la stratification complique le problème du raccord. Un premier exemple de couplage itératif est traité dans la section 4.

## 2.1 Problème et solution de référence, modélisation hybride

L'approche proposée ici s'intéresse à définir un modèle raffiné seulement là où celui-ci est nécessaire. On s'intéresse donc dans un premier temps à un cas "simplifié" de couplage poutre/2D, pour identifier les difficultés soulevées par le raccord non-intrusif.

### 2.1.1 Problème de référence

On considère une plaque dans le plan  $(x, y)$ , semi-infinie dans la largeur (direction  $y$ ) de longueur  $L = 10\text{mm}$  et d'épaisseur  $2h = 0.4\text{mm}$ , représentée FIG. 2.1a. Elle est constituée d'un empilement symétrique de plis orthotropes, de façon à ne pas générer d'effet de couplage tension/flexion/torsion. On modélise alors une tranche 2D en déformation plane dans le plan  $(x, z)$  comme représenté FIG. 2.1b. Le chargement consiste en un encastrement à l'extrémité  $x = 0$  et un déplacement transverse  $U_d = 0,02\text{mm}$  imposé à l'extrémité  $x = L$ .

Pour tout le début de l'étude, on s'intéresse au cas où la plaque est constituée d'un seul pli homogène (module d'Young  $E = 2\text{GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ ). La dimension  $L$  de la plaque a été choisie très supérieure à la longueur de pénétration des effets de bord causés par le chargement, de manière à pouvoir positionner une interface de raccord dans une zone non-affectée par ceux-ci.

La solution de référence est obtenue par la résolution éléments finis de ce problème 2D, avec un maillage suffisamment fin pour capter correctement les effets de bord à l'encastrement (100 éléments dans la longueur et 20 dans l'épaisseur, les éléments utilisés

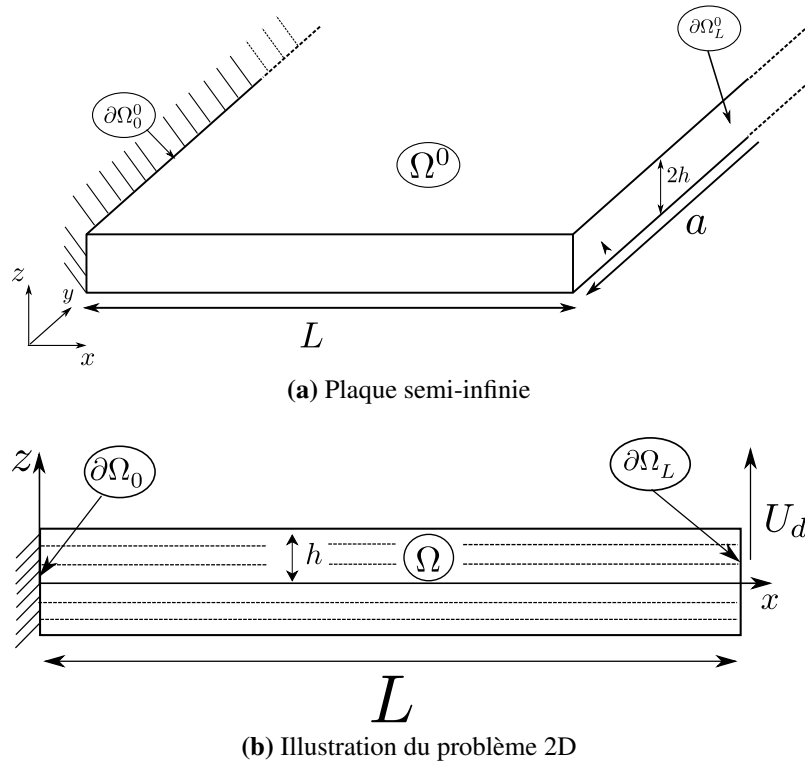


FIGURE 2.1 – Illustration de l'exemple considéré.

possèdent des fonctions d'Hermite de degré trois dans la longueur et de Lagrange de degré deux dans l'épaisseur (H3L2). Elle est illustrée FIG. 2.2.

Comme attendu pour ce cas homogène, on observe un effet de bord à l'encastrement dont la longueur de pénétration est inférieure à l'épaisseur.

En dehors de cette zone perturbée, la solution se rapproche d'une solution de Saint-Venant, c'est donc cette partie du modèle que l'on cherche à remplacer par un modèle de poutre.

### 2.1.2 Définition du modèle hybride

L'observation du modèle complet a permis de distinguer deux zones :

- près du bord : une zone perturbée doit nécessairement être calculée en 2D. Cette zone peut également être le support d'une quantité d'intérêt à estimer finement ;
- loin du bord, dans la zone intérieure : la solution de Saint Venant est prédominante, et il semble possible de remplacer le modèle 2D par un équivalent poutre.

Le modèle hybride défini FIG. 2.3 décompose le domaine  $\Omega^0$  en une partie 2D  $\Omega_I$  (zone d'intérêt), et une partie poutre  $\omega_C$  (zone complémentaire). Il pourra être obtenu à convergence d'un processus itératif impliquant une représentation poutre de la zone d'intérêt  $\omega_I$ .



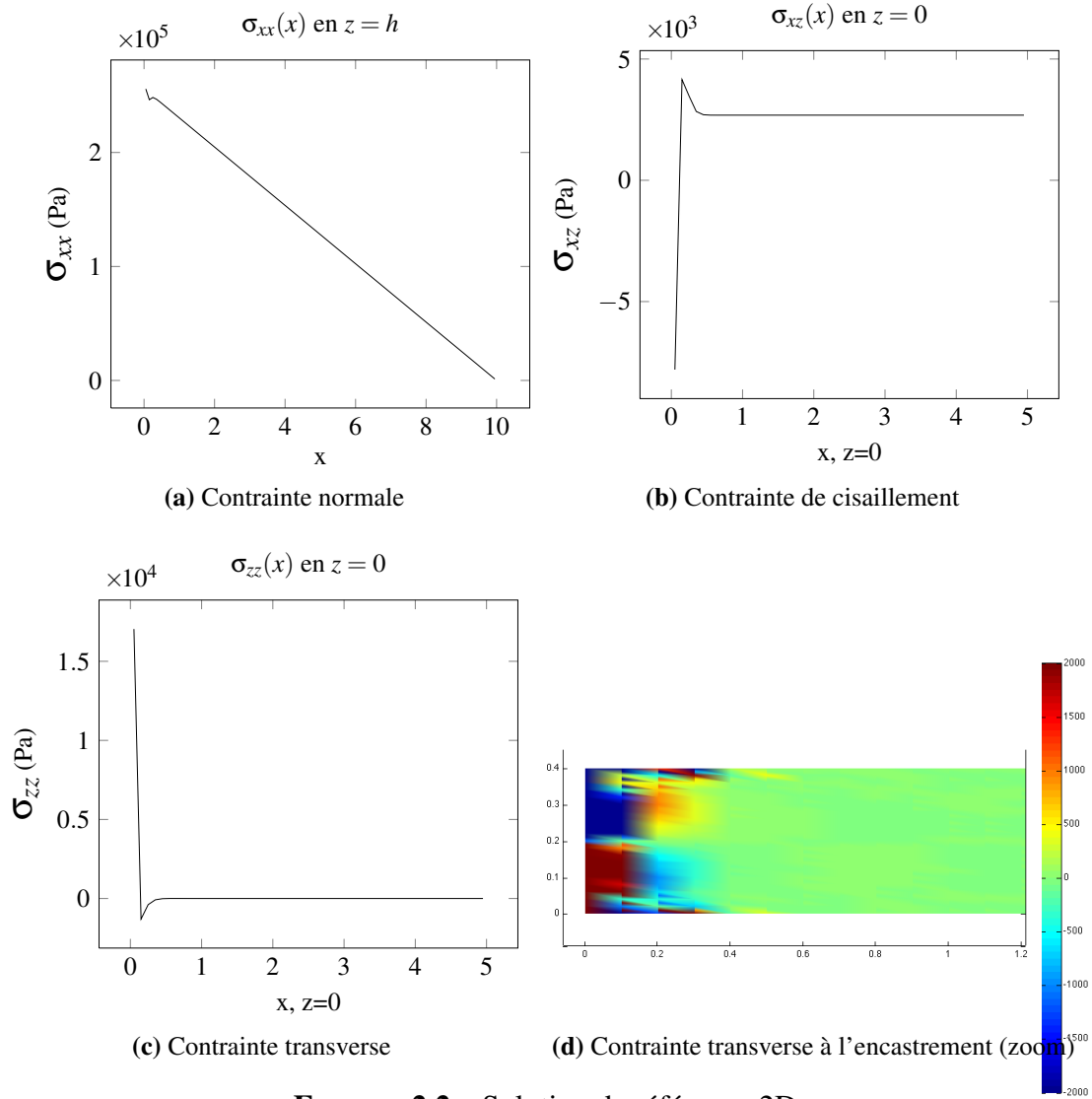


FIGURE 2.2 – Solution de référence 2D.

D'un point de vue pratique, la zone d'intérêt  $\Omega_I$  possède la même discrétisation que le calcul de référence ; la cinématique d'Euler-Bernoulli est utilisée dans le modèle poutre, et des éléments de degré 2 dont la longueur est choisie pour produire des maillages compatibles. L'interface entre les deux modèles se situe alors sur le bord des éléments.

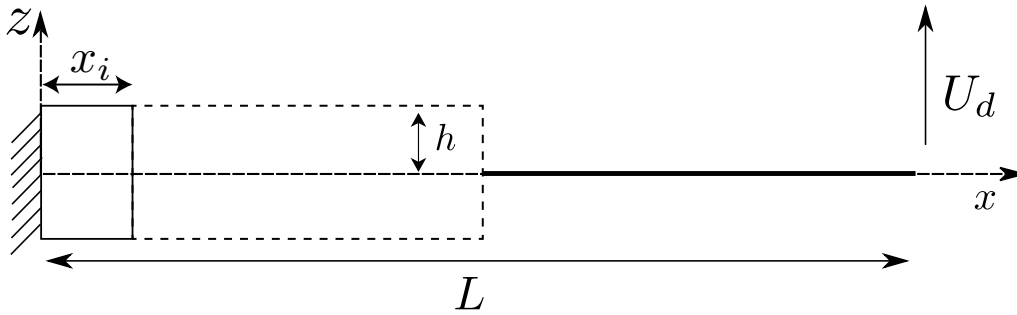


FIGURE 2.3 – Modèle hybride poutre/2D.

Le déplacement dans le modèle hybride s'exprime :

$$\forall M \in \Omega \begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_{2D} \in \Omega^I \\ \underline{u} = \underline{u}_{poutre} \in \Omega^C = \omega^C \times [-h, h] \end{cases} \quad (2.1)$$

On note  $\Gamma$  l'interface pour le domaine  $\Omega^I$  (ligne selon l'épaisseur), et  $\gamma$  l'interface pour le domaine  $\omega^C$  (simple point). Cette interface est placée au milieu du domaine, loin des effets de bords dus à l'encastrement. Le raccord entre  $\Omega^I$  et  $\omega^C$  doit traduire une certaine continuité cinématique et un équilibre des efforts.

Le but étant d'arriver à une solution la plus proche possible entre le modèle de référence et le modèle couplé, il faut s'assurer des points suivants :

- que les grandeurs généralisées soient conservées entre le modèle 2D et le modèle réduit ;
- que le raccord ne provoque pas d'effet de bord artificiel à l'interface (qui seraient particulièrement nuisibles en présence de non-linéarité) ;
- que la quantité d'intérêt observée sur le modèle couplé soit la plus proche possible du problème de référence.

Le respect de ces différents points permet de valider un raccord qui ne modifie pas les quantités observées et qui n'introduit pas de perturbation dans le problème.

Dans le cadre de la stratégie non-intrusive [Gendre, 2009] le premier point (équilibre statique au sens des efforts généralisés) est vérifié itérativement. Les autres propriétés dépendent d'une part de la position du raccord dans la structure et d'autre part de la façon dont on déduit de la solution globale poutre les conditions limites sur le modèle local. Ces questions sont abordées dans la section suivante.

## 2.2 Étude des relèvements proposés

On s'intéresse ici à la définition de conditions limites sur l'interface 2D à partir de la solution poutre. La difficulté tient dans la prise en compte du caractère mixte des hypothèses de la théorie des plaques. Les relèvements proposés sont évalués dans le cadre d'une simple étude « descendante » (*submodelling*) qui suffit à mettre en évidence leur qualité mécanique.

Trois approches sont proposées :

- l'utilisation directe de la cinématique plaque, méthode simpliste qui néglige les hypothèses statiques,
- l'utilisation d'une reconstruction analytique du déplacement à l'interface, méthode qui se met en œuvre relativement simplement dans l'exemple choisi mais en général beaucoup plus difficile à utiliser,
- l'utilisation d'une condition limite mixte, qui s'interprète comme un raccord en travail.

### 2.2.1 Présentation des trois raccords

#### 2.2.1.1 Le raccord simple

Le raccord simple consiste à utiliser directement les hypothèses de Kirchhoff-Love (2.2) ou de Reissner-Mindlin (2.3) du modèle réduit pour reconstruire le déplacement.

Pour la cinématique de Kirchhoff-Love, on utilise :

$$\underline{U}^{2D}(m, z) = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \underline{\text{grad}}_m(w(m)) \quad (2.2)$$

et pour la cinématique de Reissner-Mindlin, on utilise :

$$\underline{U}^{2D}(m, z) = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \underline{\theta}(m) \quad (2.3)$$

avec  $(\underline{V}, w, \underline{\theta})$  les composantes cinématiques plaques, respectivement le déplacement dans le plan de la plaque, le déplacement transverse et la rotation de la section.

L'application d'un tel raccord est souvent disponible dans les codes éléments finis, par exemple dans le Code\_Aster avec le mot clé `MASSIF_COQUE` ou `COQUE_MASSIF` suivant le modèle maître choisi, ou dans ABAQUS avec la méthode `KINEMATIC_COUPLING`.

De toute évidence un tel raccord, en bloquant les déformations transverses, risque d'aller en contradiction avec l'hypothèse inhérente aux théories de plaque de contrainte  $\sigma_{zz}$  négligeable. Les raccords suivants essaient de corriger cette lacune.

#### 2.2.1.2 Le raccord analytique

Le raccord analytique est une application directe des méthodes développées dans la section 1.1.2.2. On en déduit ici les expressions pour un relèvement 2D qui prennent alors les formes suivantes,

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

au premier ordre :

$$\underline{U}^{o1}(x, z) = \left( w(x) + \frac{1}{1-\nu} \left( \nu \frac{y^2}{2} - h^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4)$$

et au deuxième ordre :

$$\underline{U}^{o2}(x, z) = \underline{U}^{o1}(x, z) + z^3 \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (2.5)$$

*Remarque.* On note alors des termes allant jusqu'au 3<sup>e</sup> ordre sur le déplacement transverse. L'obtention de ces termes sur la solution plaque est effectué ici en post-traitement de la solution poutre. On utilise un schéma de différence fini sur le déplacement transverse  $w$  pour remonter jusqu'au terme  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ .

Ce schéma est effectué sur une poutre discrétisée très finement, de sorte que l'erreur induite par les dérivations successives reste acceptable.

La reconstruction de cette solution est assez complexe et pose le problème de la régularité des champs disponibles. Un raccord de ce type est proposé à la section 4.1.3, il s'appuie sur une reconstruction alternative purement numérique des déplacements présentée à la section 3.1.2.

En pratique le raccord analytique revient donc à imposer uniquement des déplacements en chacun des nœuds de l'interface ce qui est possible sur tout type de code éléments finis. Dans la suite, afin de différencier l'ordre auquel les solutions sont reconstruites de l'ordre de grandeur effectivement atteint à partir d'une reconstruction basée sur une solution plaque inexacte, on appelle :

- R1 : la reconstruction analytique à l'ordre 1 (2.4),
- R2 : la reconstruction analytique à l'ordre 2 (2.5).

*Remarque.* On peut noter que ces reconstructions du champ 3D à partir des contraintes plaque fournit un ordre de grandeur à attendre sur les contraintes de cisaillement et sur les contraintes hors-plan :

$$\sigma_{xz} = \frac{h}{L} O(\sigma_{xx}) \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = \frac{h^2}{L^2} O(\sigma_{xx}) \quad (2.6)$$

### 2.2.1.3 Le raccord en travail équivalent ou raccord « plateau »

La difficulté de construction du raccord précédent nous a poussé à proposer une approche alternative, permettant d'obtenir un raccord de qualité correcte, tout en limitant les calculs analytiques.

Comme il a été pointé précédemment, l'hypothèse de négligeabilité de  $\sigma_{zz}$  doit transparaître dans le raccord, par exemple en améliorant le profil des déplacements. La solution retenue pour ce raccord est de « relâcher » les degrés de liberté transverses sur les nœuds de la section afin de ne pas sur-contraindre la cinématique à l'interface. Cela permet de trouver une solution approchant au premier ordre la solution de Saint-Venant.

La cinématique imposée dans ce raccord, appelé "plateau", s'exprime de la façon suivante :

1. Le déplacement normal à la section est imposé directement sur les nœuds en supposant la section rigide :  $U_x^{2D}(m, z) = V_x(m) - z \underline{\text{grad}} w(m) \cdot \underline{x}$ .
2. Le déplacement transverse est imposé de façon faible, en moyenne sur toute la section  $\int_{\Gamma} f(z) U_z^{2D}(z) ds = w(m)$  où  $\int_{\Gamma} f(z) ds = 1$ . On se réserve le choix d'une pondération  $f(z)$  optimale, qui dépendra de l'empilement considéré.

On peut donc écrire un problème de minimisation de l'énergie potentielle sous la contrainte d'une moyenne de déplacement dans l'épaisseur. Soit  $\mathcal{U}$  l'espace des déplacements 2D dans  $\Omega^I$  respectant l'encastrement en  $x = 0$  et le déplacement normal imposé au niveau du raccord (on appelle  $\mathcal{U}^0$  l'espace vectoriel associé), on cherche dans  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$  le point selle du Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\underline{U}^{2D}, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^I} \varepsilon(\underline{U}^{2D}) \mathbf{H} \varepsilon(\underline{U}^{2D}) d\Omega - \left( \int_{\Gamma} f(z) U_z^{2D} dS - w \right) \lambda \quad (2.7)$$

On a ainsi le système à résoudre :

$$\forall \underline{U}^{2D*} \in \mathcal{U}^0, \lambda^* \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \varepsilon(U_z^{2D}) \mathbf{H} \varepsilon(U_z^{2D*}) d\Omega = \lambda \int_S f(z) U_z^{2D*} dS & (2.8a) \\ \left( \int_S f(z) U_z^{2D} dS - w \right) \lambda^* = 0 & (2.8b) \end{cases}$$

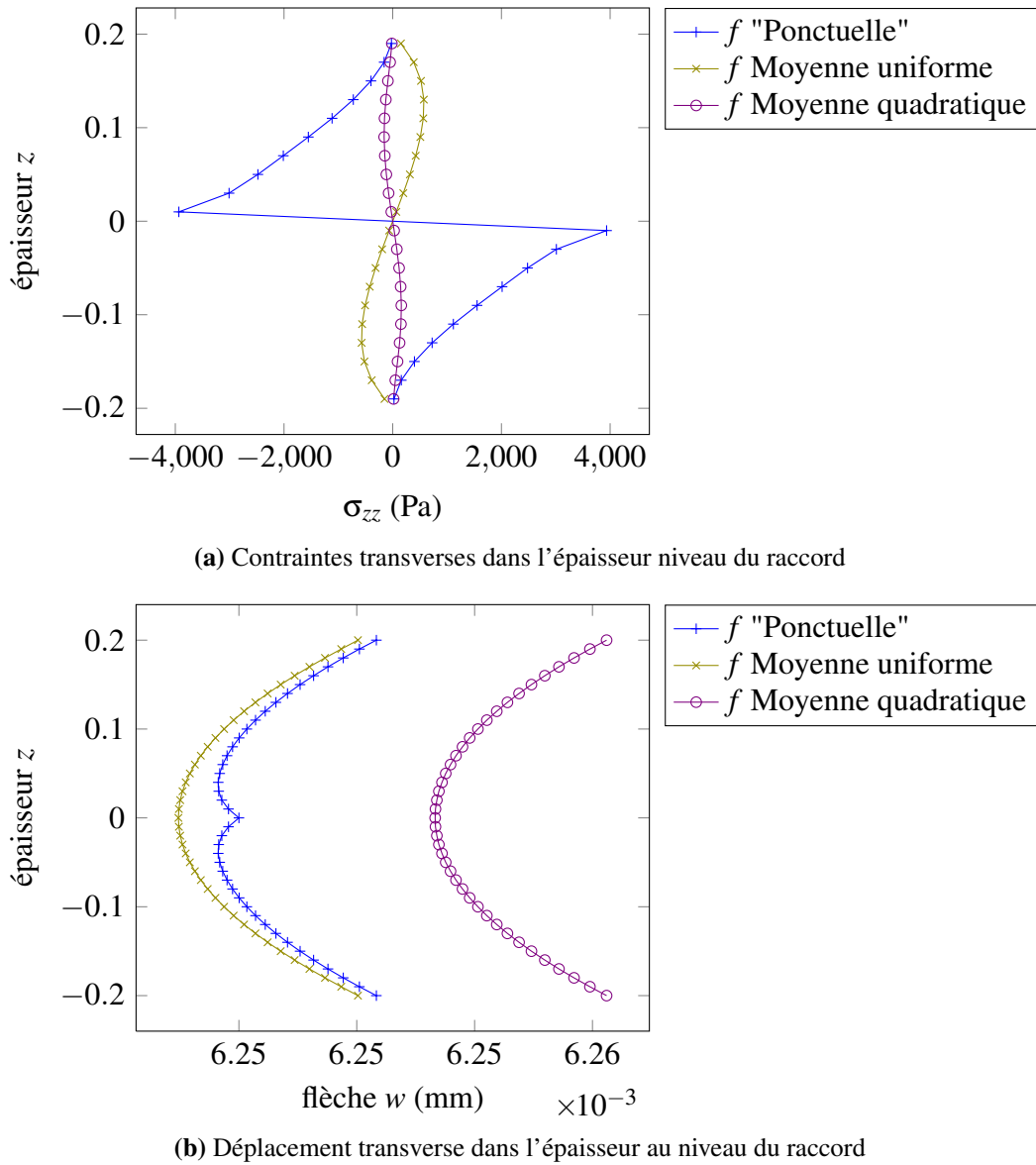
La fonction  $f$  s'interprète comme une distribution d'efforts dans l'épaisseur, et  $\lambda$  correspond à l'amplitude à donner à ces efforts pour vérifier la contrainte cinématique (2.8b). Sur l'interface, on a  $\sigma_{xz}(z) = \lambda f(s)$ , et donc  $\lambda = \int_{\Gamma} \sigma_{xz} ds$ , le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  correspond donc à l'effort généralisé de cisaillement.

En anticipant sur les itérations de l'algorithme de couplage non-intrusif, on voit qu'à convergence, outre la continuité cinématique moyenne, on aura équilibre de l'effort généralisé de cisaillement. On retrouve de fait une équivalence en travail entre le modèle poutre et le modèle 2D similaire à celle proposée dans [McCune *et al.*, 2000].

Les figures FIG. 2.4 présentent les distributions résultantes de différents choix de fonctions  $f$ . Le cas ponctuel correspond à imposer le déplacement au nœud milieu, ce qui correspond à appliquer un effort concentré, ce qui est mécaniquement et mathématiquement contestable. On note également que dans les cas de distributions uniforme et quadratique, des déplacements pourtant proches conduisent à des profils de contraintes très différents. La distribution quadratique, correspondant à la distribution exacte de la contrainte de cisaillement dans le cas d'une poutre homogène, donne naturellement les meilleurs résultats. Cette distribution sera donc utilisée dans la section suivante pour comparer ce raccord aux deux autres.

Bien sûr la construction d'une bonne distribution  $f$  dans le cas général d'un stratifié orthotrope n'est pas une question aussi simple. La technique proposée à la section 4.1.2 s'appuie sur une construction numérique automatique proposée à la section 3.1.1.

Ce raccord permet donc d'éviter certains effets de bord nuisibles apparaissant dans le cas d'un raccord direct à l'interface, en relâchant le déplacement transverse. En revanche



**FIGURE 2.4** – Effets des différents choix d’application du déplacement transverse pour le raccord plateau.

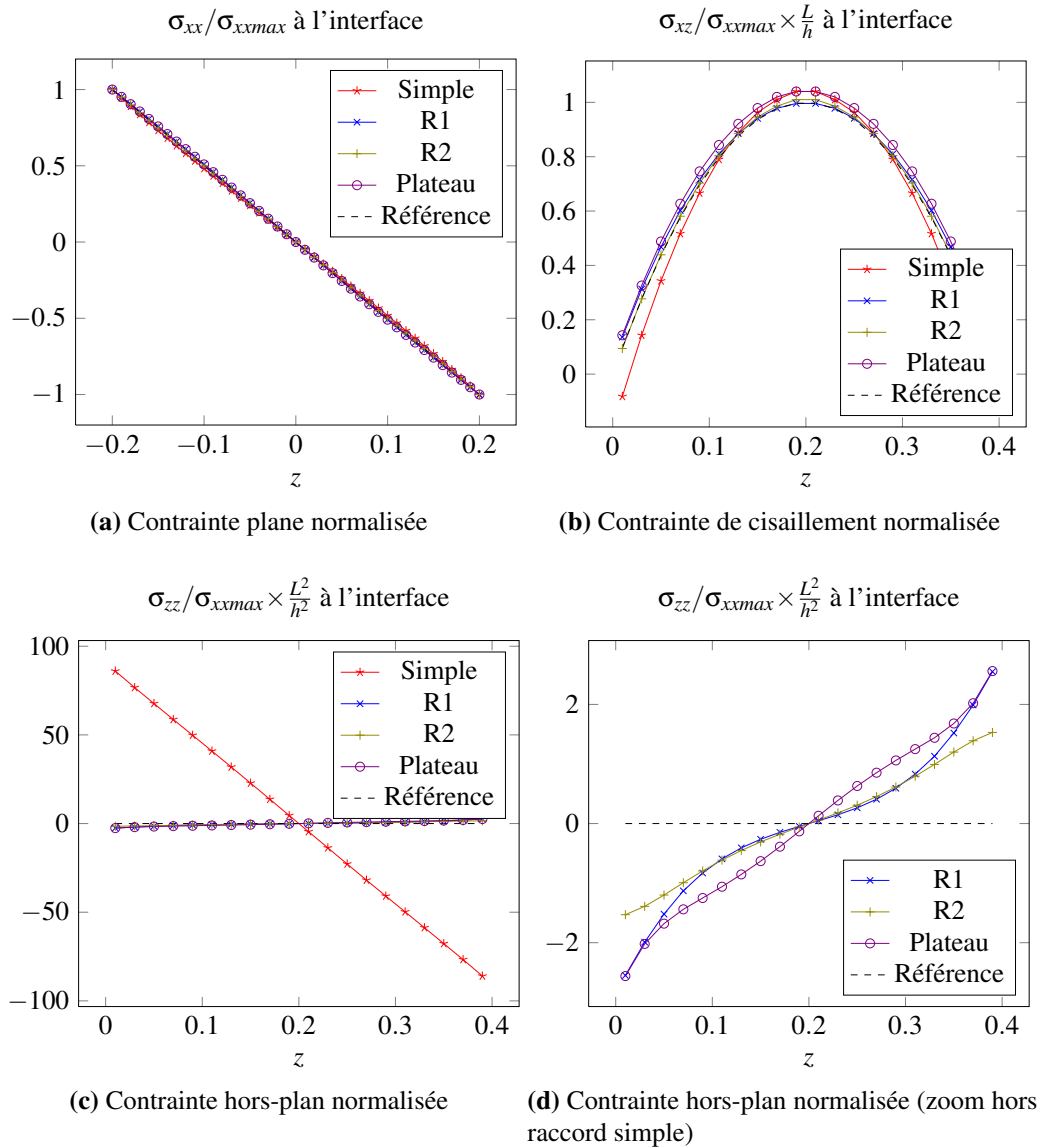
on ne dispose pas d’outil théorique pour s’assurer de la qualité du raccord dont on espère qu’elle sera comparable à celle obtenue à partir d’un champ analytique reconstruit à l’ordre 1.

*Remarque.* Du point de vue de la mise en œuvre dans le cas plaque/3D, ce raccord peut être réalisé à l’aide d’une contrainte multipoint (MPC) par nœud plaque de l’interface. Dans ABAQUS, la méthode SHELL-TO-SOLID permet un couplage par MPC ligne à ligne. Cependant, les fonctions de pondération  $f$  sont constantes ou linéaires par rapport au centre de gravité de la section et risquent d’entraîner des surcontraintes au raccord.

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

## 2.2.2 Comparaison des différents raccords dans le cas isotrope

On reprend le problème décrit dans la section 2.1.2 pour lequel on teste les raccords précédemment présentés sur une simple descente (sans itération) et pour un raccord en  $x = 5$ .



**FIGURE 2.5** – Comparaison des contraintes dans la section à l'interface pour les différents raccords

Les figures FIG. 2.5 présentent les profils de contraintes dans l'épaisseur au niveau du raccord. Les solutions obtenues sont normalisées en utilisant les ordres de grandeurs donnés par la théorie des plaques (2.6). On observe que les raccords analytiques et pla-

teau donnent des résultats très proches de la référence alors que le raccord simple est particulièrement faux sur la composante hors-plan.

On note peu d'évolution entre les raccords analytiques aux ordres 1 et 2, que ce soit sur les contraintes de cisaillement ou les contraintes transverses. Cet aspect était prévisible puisque même si la forme de la solution de Saint-Venant est exploitée pour le relèvement analytique, la valeur de celle-ci est approchée à l'ordre un, en raison de l'erreur sur la solution poutre elle-même [Ladevèze et Pecastaings, 1988].

De plus on peut aussi voir sur la figure FIG. 2.5d que l'ordre de grandeur des contraintes est le même entre le raccord analytique d'ordre 1 et le raccord plateau, ce qui est cohérent avec le fait que dans le raccord d'ordre 1 seuls les déplacements transverses sont corrigés, les déplacements plans étant identiques pour les deux raccords.

Les figures 2.6a, 2.6b et 2.6c montrent la pénétration des effets de bord dus au raccord. Le raccord « simple » est particulièrement néfaste, alors que les raccords analytiques et plateau, plus proches de la solution de Saint-Venant, conduisent à des atténuations rapides. Sur les figures 2.6c et 2.6d, on vérifie que la pondération quadratique donne de meilleurs résultats que la pondération uniforme.

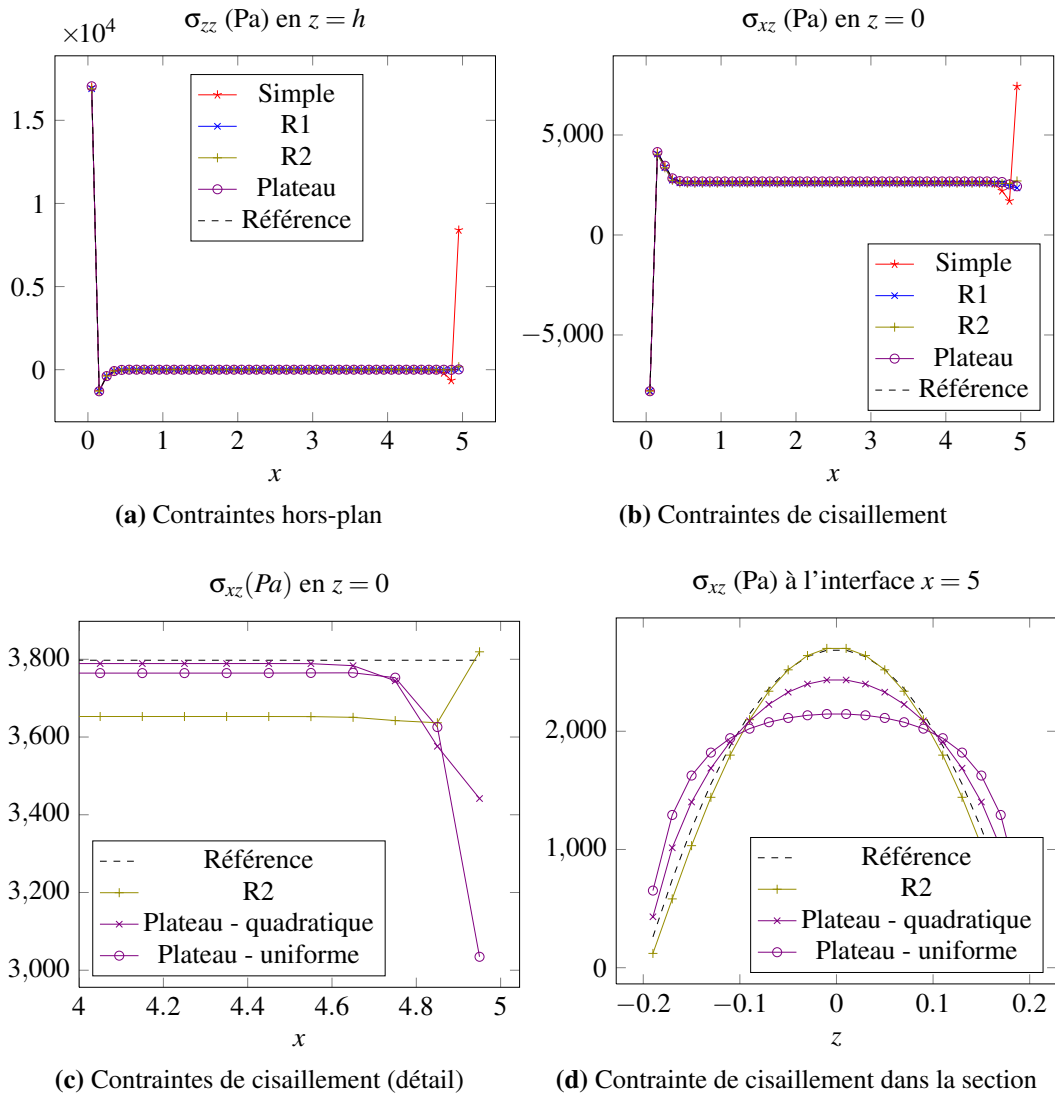
—	$M_x$ (N.m)	err. $M_x$ (%).	$Q_x$ (N)	err. $Q_x$ (%).
Poutre	$-3.591 \cdot 10^3$	-0.11	$7.182 \cdot 10^2$	0.33
Simple	$-3.636 \cdot 10^3$	1.14	$8.018 \cdot 10^2$	12.00
R1	$-3.629 \cdot 10^3$	0.94	$6.82 \cdot 10^2$	-4.73
R2	$-3.67 \cdot 10^3$	2.08	$6.862 \cdot 10^2$	-4.15
"plateau"	$-3.568 \cdot 10^3$	-0.76	$7.054 \cdot 10^2$	-1.46
Référence	$-3.595 \cdot 10^3$	0.00	$7.159 \cdot 10^2$	0.00

**TABLE 2.1** – Comparaison des efforts généralisés, modèle poutre Euler-Bernouilli.

La table 2.1 permet de comparer les efforts généralisés à l'interface entre le modèle poutre, les différents raccords et le modèle de référence ; un histogramme des erreurs relatives au modèle de référence est donné FIG. 2.7. On y observe que le modèle poutre est assez peu éloigné du modèle de référence, ce qui assure que le raccord est placé dans une zone dominée par une solution de St Venant. À l'interface, le raccord simple produit essentiellement des erreurs sur le cisaillement, mais une telle erreur tend à se propager à l'intérieur du domaine (via le moment engendré). Les reconstructions analytiques à l'ordre 1 ou 2 du déplacement conduisent à des niveaux d'erreur un peu supérieur au raccord « plateau ».

Au final, le raccord plateau semble offrir un compromis avantageux entre la facilité d'implémentation et la contrainte d'engendrer le moins d'effet de bords artificiel à l'interface entre les deux modèles. Dans la suite on s'intéresse donc particulièrement au développement de ce raccord en le confrontant à un cas où la pondération optimale n'est pas connue.





**FIGURE 2.6** – Contraintes dans la plaque le long de l'axe  $x$  (a,b,c) et dans la section à l'interface (d)

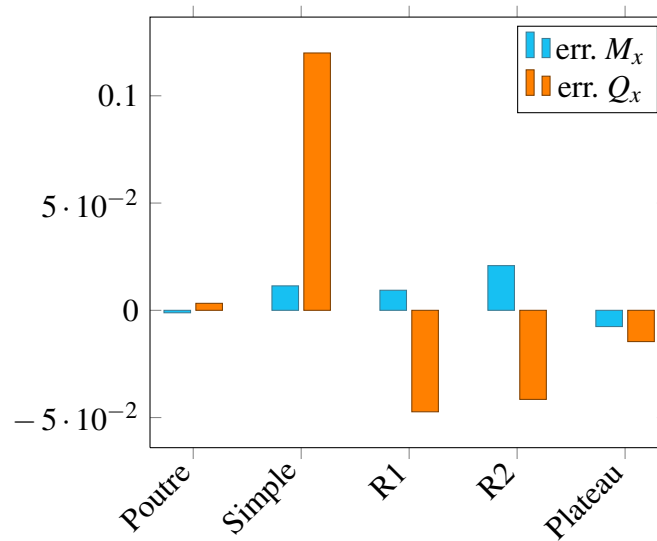


FIGURE 2.7 – Histogramme des erreurs pour les différents raccords.

### 2.2.3 Effets de la stratification pour le raccord plateau uniforme

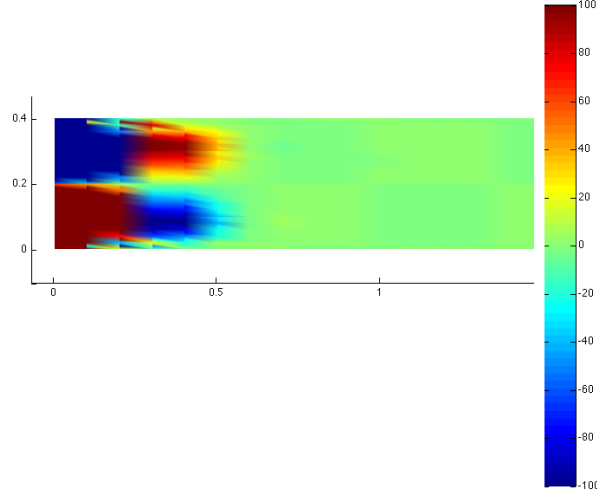
Pour cette étude, la même géométrie que précédemment est utilisée mais la plaque est dorénavant composée de 4 plis (d'épaisseur 0,1 mm) orientés  $(0/90)_s$  et dont les modules de Young sont  $E_L = 2$  GPa,  $E_T = \frac{3E_L}{5}$  et de coefficient de Poisson  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{12} = 0,33$ .

Le fait de passer d'une plaque homogène à une plaque stratifiée orthotrope entraîne les difficultés suivantes :

- l'allure des contraintes de cisaillement dans la section devient quadratique par morceaux ;
- la profondeur de pénétration des effets de bords est plus importante comme on peut le constater sur la figure 2.8.

Dans le cadre d'une application industrielle, le développement analytique d'une solution avec correction des déplacements au 2<sup>e</sup> ordre semble difficile à généraliser, mais surtout pour les raisons évoquées précédemment et dans la bibliographie, n'apporterait pas d'information supplémentaire par rapport à une approximation à l'ordre 1. Le raccord « plateau » quant-à lui pose la question du choix de la pondération à utiliser pour appliquer le déplacement transverse, car la pondération optimale dépend de la section. Dans la section 3.1.1 une technique numérique de calcul de cette pondération est proposée ; pour cette étude préalable, la pondération uniforme est employée afin d'observer le comportement de la méthode dans un cas défavorable.

Les figures FIG. 2.9 présentent l'évolution des contraintes le long du stratifié et des profils sur l'interface. On observe que la pondération non-optimale (uniforme) conduit à des profils relativement erronés sur l'interface mais que l'erreur est très vite atténuée dans la zone d'intérêt. Ainsi le raccord « plateau » semble garantir une certaine stabilité de la solution à l'intérieur de la zone d'intérêt.



**FIGURE 2.8** – Contrainte transverse à l’encastrement pour un empilement  $(0/90)_s$  de plis orthotropes.

## 2.2.4 Etude de l’influence de la position du raccord

Les raccords précédemment proposés sont formulés sous l’hypothèse qu’ils sont placés dans une zone où la solution de Saint-Venant prédomine, loin des effets de bord. Afin d’éprouver l’importance de cette hypothèse, on effectue divers calculs avec une interface plus proche de l’encastrement.

Ici, on compare directement le modèle hybride avec la solution de référence afin d’en déduire une erreur ; une question plus générale sous-jacente à cette étude concerne la capacité à fournir un indicateur signalant que le raccord se situe dans une zone où il risque de mal fonctionner.

Le placement de l’interface  $x_i$  varie entre 0.1 et 5 (voir FIG. 2.10), la zone d’influence de l’effet de bord ayant a priori une profondeur de  $2h = 0.4$ .

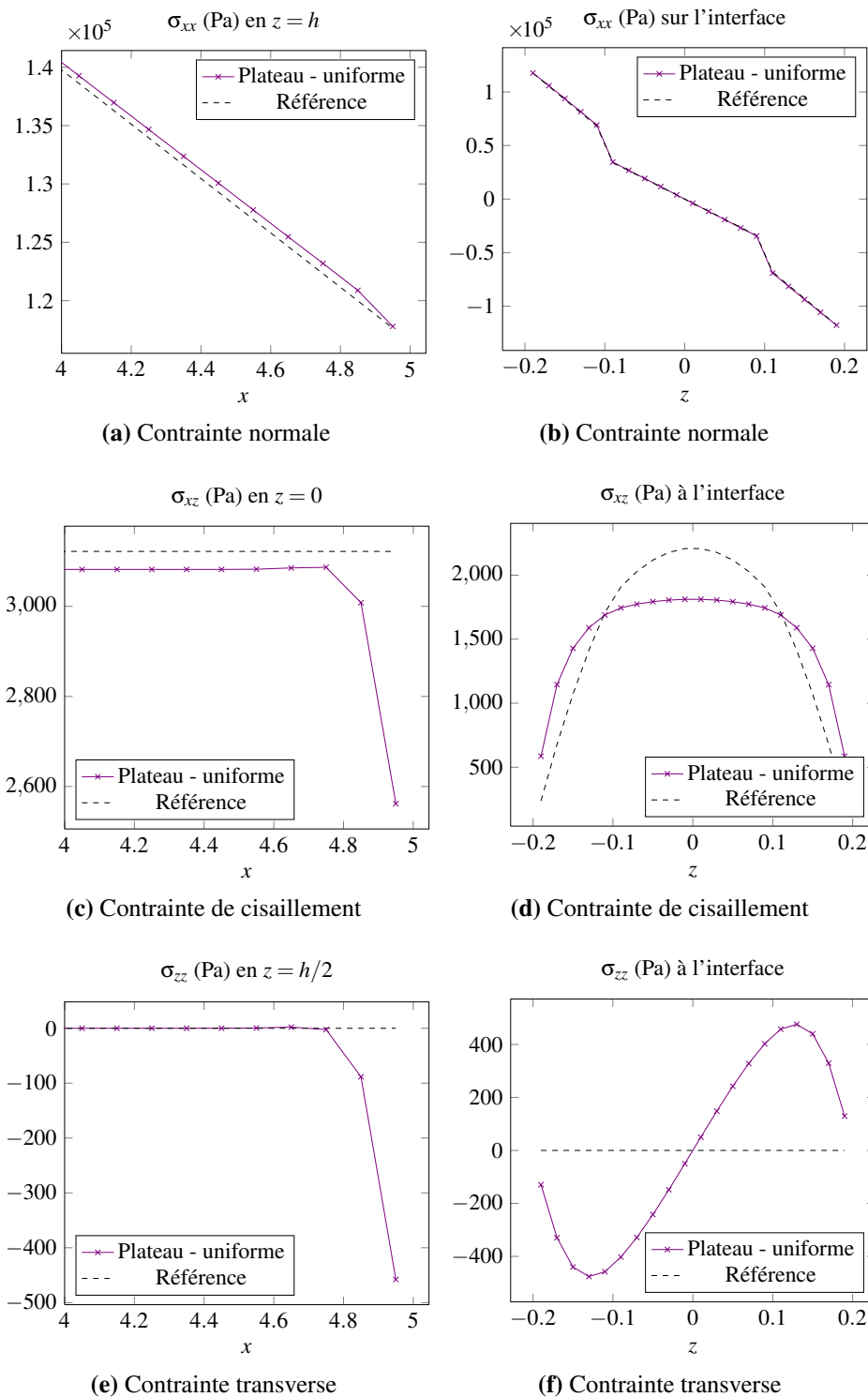
On définit donc les erreurs et indicateurs suivants sur l’interface :

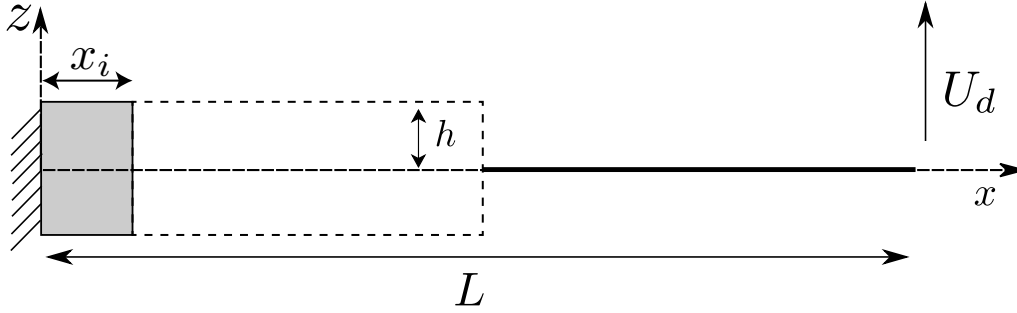
$$E_{xx} = \frac{\max(\sigma_{xx}(z) - \sigma_{xx}^R(z))}{\max(\sigma_{xx}^R(z))} \quad I_{xx} = \frac{\max(\sigma_{xx}(z) - \sigma_{xx}^P(z))}{\max(\sigma_{xx}^P(z))} \quad (2.9)$$

$$E_{xz} = \frac{\max(\sigma_{xz}(z) - \sigma_{xz}^R(z))}{\max(\sigma_{xx}^R(z)) \frac{h}{L}} \quad I_{xz} = \frac{\max(\sigma_{xz}(z) - \sigma_{xz}^P(z))}{\max(\sigma_{xx}^P(z)) \frac{h}{L}} \quad (2.10)$$

$$E_{zz} = \frac{\max(\sigma_{zz}(z) - \sigma_{zz}^R(z))}{\max(\sigma_{xx}^R(z)) \frac{h^2}{L^2}} \quad I_{zz} = \frac{\max(\sigma_{zz}(z) - \sigma_{zz}^P(z))}{\max(\sigma_{xx}^P(z)) \frac{h^2}{L^2}} \quad (2.11)$$

où  $\sigma^R$  correspond à la contrainte de référence (calculée sur un problème 2D complet) et  $\sigma^P$  correspond au relèvement des contraintes de la solution plaque, dont l’expression est

FIGURE 2.9 – Contraintes dans la plaque le long de l'axe  $x$  et dans la section à l'interface.



**FIGURE 2.10** – Placement de l'interface de raccord à différentes abscisses  $x_i$ .

pour une poutre homogène :

$$\sigma_{xx}^P = \frac{Mz}{EI_z} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zz}^P = 0 \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xz}^P = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (2.14)$$

Les figures FIG. 2.11 montrent l'évolution des erreurs et indicateurs en fonction du placement de l'interface. L'effet de l'encastrement est assez faible sur le raccord plateau, dont les hypothèses mixtes restent pertinentes même à proximité du bord. Il est par contre bien visible sur le raccord analytique, avec une zone d'influence allant jusqu'à 3 fois l'épaisseur selon l'axe des abscisses. Cet effet est probablement dû à une mauvaise estimation numérique des gradients dans cette zone. De plus, la formule en (1.33) montre que la correction transverse ne tend pas vers zéro à l'encastrement, ce qui est en contradiction avec la cinématique réelle :

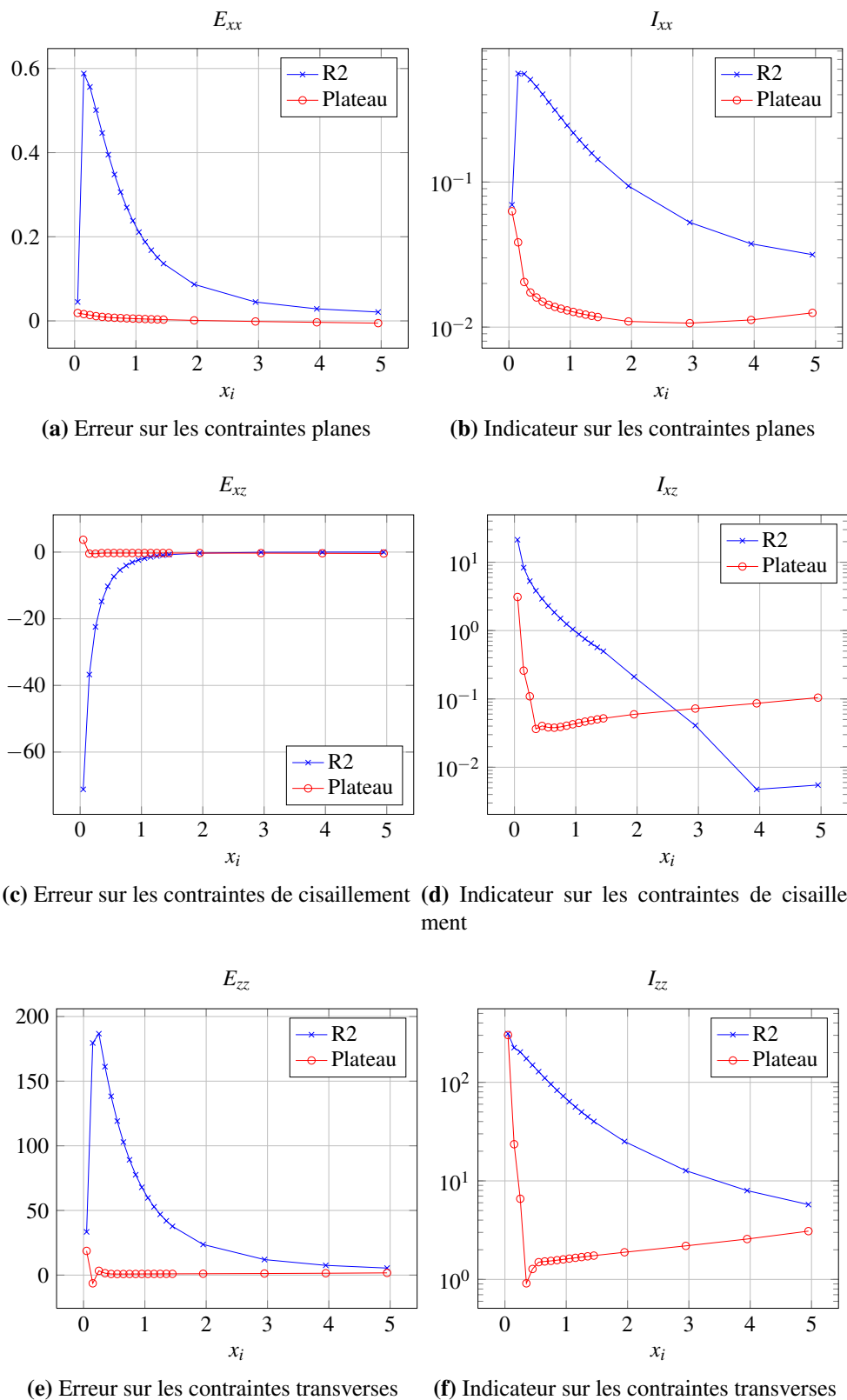
$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{1}{1-\nu} \left( \nu \frac{z^2}{2} - h^2 \right) \Delta_m(w)(x_i) \neq 0 \quad (2.15)$$

avec  $\Delta_m(w)(x_i) = \frac{M(x_i)}{EI}$ .

On observe par ailleurs que les indicateurs ont des allures proches de celles des erreurs exactes, mais ne convergent pas vers zéro quand on éloigne le raccord de l'encastrement. La section suivante montre comment des itérations permettent de diminuer la valeur de ces indicateurs.

Un autre indicateur peut être obtenu en comparant les efforts généralisés du modèle plaque avec ceux obtenus par post-traitement du modèle 2D. Cet indicateur est particulièrement pratique dans le cas de stratifiés où les formules de relèvements sont plus complexes à obtenir ; il est par ailleurs naturellement calculé dans le cadre de la technique non-intrusive présenté par la suite. On définit les deux indicateurs suivants :

$$I_{M_{xx}} = \frac{M_{xx}^L - M_{xx}^P}{M_{xx}^P} \quad I_{Q_x} = \frac{Q_x^L - Q_x^P}{Q_x^P} \quad (2.16)$$



**FIGURE 2.11** – Erreur et indicateur sur l'interface pour différentes abscisses  $x_i$  du raccord.

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

Naturellement, ces indicateurs ne permettent pas d'étudier la contrainte transverse  $\sigma_{zz}$  qui ne possède pas d'effort généralisé associé.

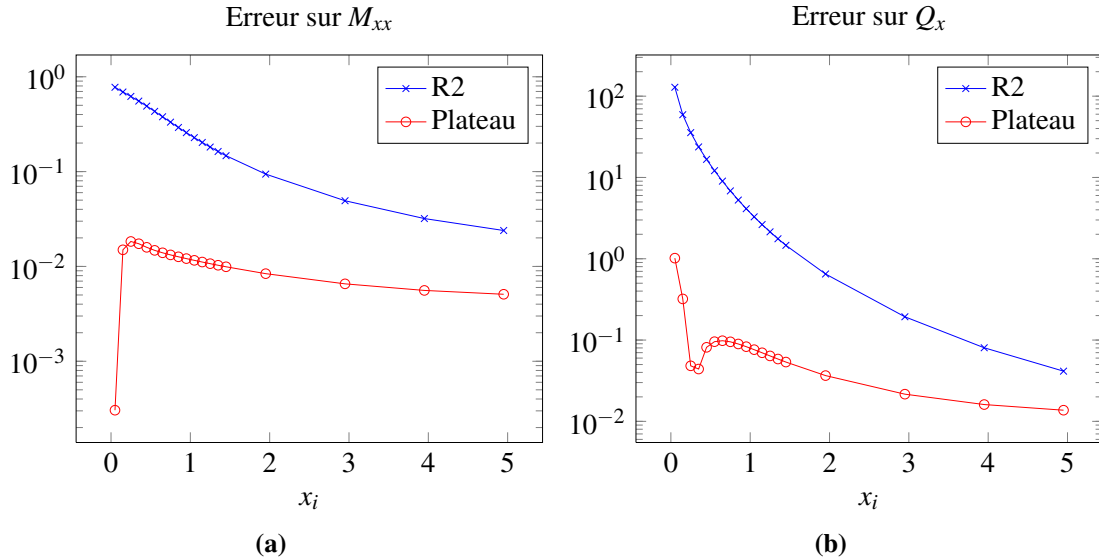


FIGURE 2.12 – Efforts généralisés pour différentes positions de l'interface  $x_i$ .

Les figures FIG. 2.12 présentent le niveau de ces indicateurs en effort en fonction de la position de l'interface. L'information obtenue est proche de celle constatée sur les relèvements.

*In fine*, une bonne stratégie pour évaluer la qualité du raccord semble être d'utiliser les indicateurs en efforts généralisés  $M_x$  et  $Q_x$  complétés par l'indicateur en relèvement sur  $\sigma_{zz}$  dont on doit s'assurer que l'ordre de grandeur reste compatible avec les hypothèses du modèle plaque.

## 2.3 Première application du couplage non-intrusif

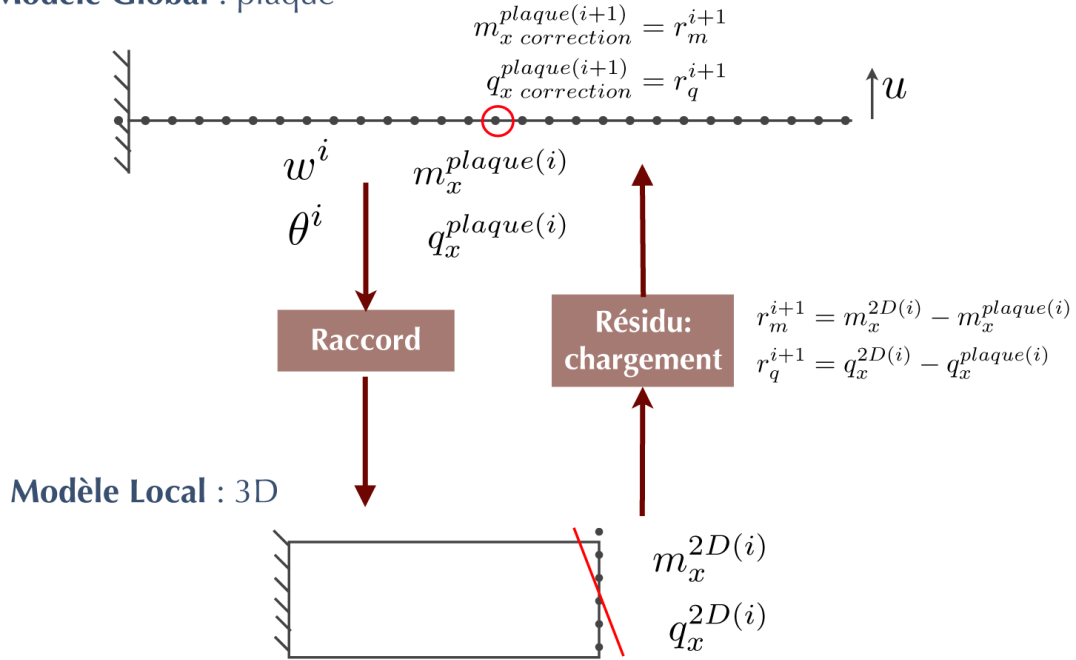
On s'intéresse ici à l'utilisation des raccords validés précédemment, dans le cadre de l'approche de couplage non-intrusif de façon à obtenir un modèle hybride 2D/poutre.

Les étapes de la stratégie non-intrusive sont résumées sur le schéma FIG. 2.13. Après une initialisation par un calcul poutre complet, le modèle 2D est calculé avec des conditions limites données par le raccord choisi ; le résidu correspond au déséquilibre des efforts généralisés entre le calcul plaque précédent et le calcul 2D. Il est ensuite réinjecté comme un chargement dans le calcul de correction global.

Le couplage non-intrusif convergeant sous des hypothèses relativement larges, il ne s'agit pas tant de vérifier la convergence de la méthode (présentée figure FIG. 2.14 par l'évolution de l'amplitude des composantes du résidu au cours des itérations), que d'évaluer le modèle limite obtenu en le comparant avec un calcul de référence 2D complet (voir le tableau 2.2).

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

## Modèle Global : plaque

FIGURE 2.13 – Vue d'ensemble de la stratégie à l'itération  $i$ .

On observe que dans le cas choisi le modèle poutre donne déjà une information très pertinente, les itérations permettent de gagner légèrement en précision, notamment en corrigeant la prise en compte des conditions limites du modèle poutre. Les « modèles hybrides » sont différents selon les raccords choisis, le raccord plateau conduisant à un modèle plus proche de la référence en terme de moment mais légèrement moins bon sur le cisaillement que le raccord analytique au second ordre.

—	$M_x$ (N.m)	err. $M_x$ (%).	$Q_x$ (N)	err. $Q_x$ (%).
"plateau"	$-3.593 \cdot 10^3$	-0.07	$7.185 \cdot 10^2$	0.37
R2	$-3.586 \cdot 10^3$	-0.27	$7.171 \cdot 10^2$	0.17
Référence	$-3.595 \cdot 10^3$	0.00	$7.159 \cdot 10^2$	0.00

TABLE 2.2 – Comparaison des efforts généralisés à convergence (sur  $m_x$  et  $q_x$ ).

Les courbes FIG. 2.15, montre l'évolution de l'écart à la référence pour les deux raccords au cours des itérations. On observe que la stagnation apparaît bien plus tôt que pour le résidu FIG. 2.14 (1 itération au lieu de 3) et à des niveaux bien supérieurs ( $10^{-3}$  au lieu de  $10^{-8}$ ). Cette stagnation, dont le niveau dépend du raccord choisi, est bien sûr causée par les simplifications inhérentes au modèle poutre.

Il est aussi intéressant de noter que l'erreur minimale obtenue entre le problème hy-



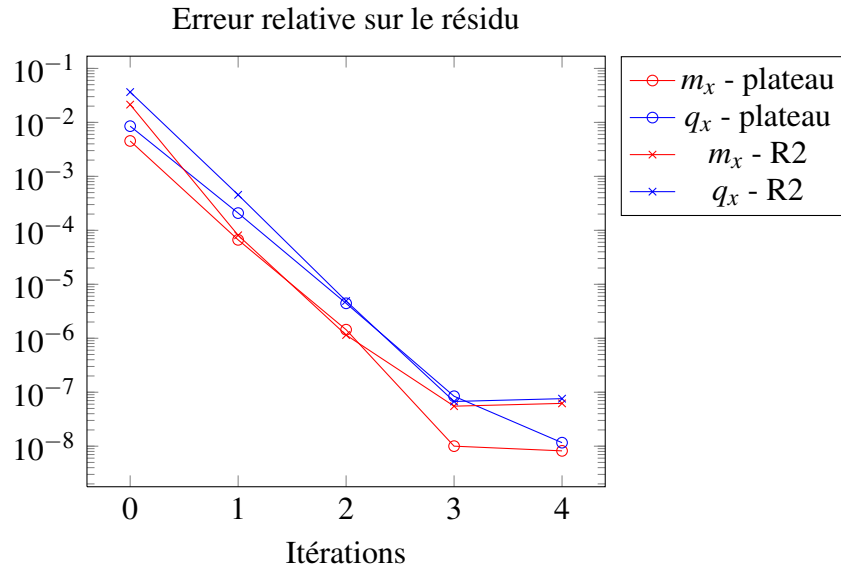


FIGURE 2.14 – Convergence avec correction sur  $m_x$  et  $q_x$ .

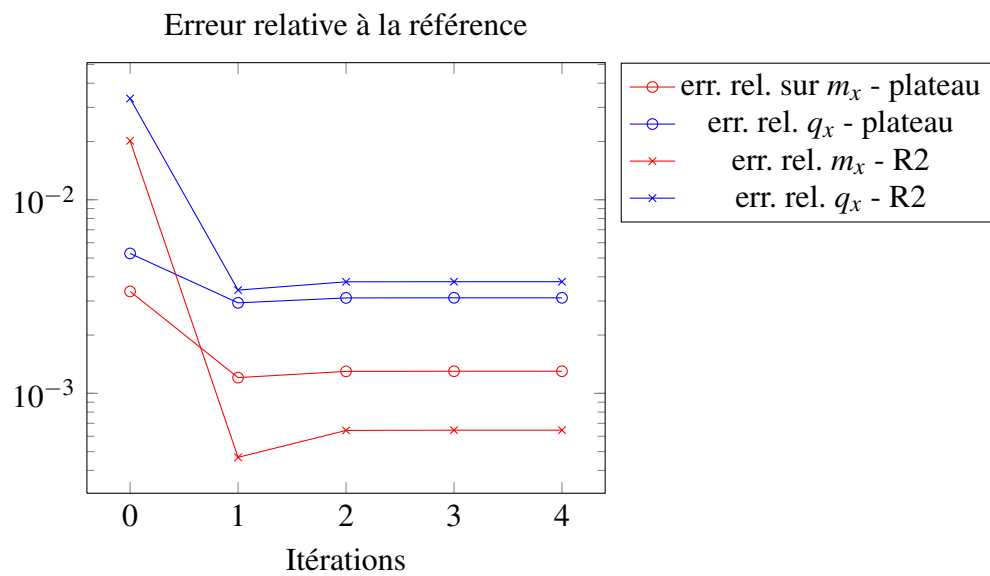
bride et le problème de référence est de l'ordre de  $10^{-3}$ , ce qui correspond approximativement à une erreur en  $h^2/L^2$  pour le problème considéré, ce qui semble être la meilleure approximation que l'on peut faire du problème.

## 2.4 Conclusion

Cette pré-étude permet de dégager quelques pistes la définition de raccords plaque/3D dans le cas des plaques composites. Les deux techniques de raccords le plus efficaces se sont révélées être le raccord analytique et le raccord « plateau ». Ces deux raccords s'appuient sur une connaissance de relèvements de la solution plaque, même approchés (l'ordre 2 semble satisfaisant), en déplacement pour le raccord analytique et en effort (au travers de la pondération  $f(z)$ ) pour le raccord « plateau ». Un raccord plus grossier conduirait à de grands effets de bord artificiels à l'interface qui s'avérerait dramatique dans le cadre d'un modèle local non-linéaire.

La simplicité du problème considéré ici (homogénéité, chargement simple) a permis d'utiliser des formules de relèvement qui requièrent une grande régularité de la solution de base. Appliquer de telles formules sur la base de la solution éléments finis d'un problème non-académique de plaque semble irréaliste dans un cadre non-intrusif.

Le chapitre 3 propose donc une technique de calcul numérique des relèvements en déplacement et effort qui évite les problèmes de régularité et fournit des quantités qui seront directement exploitables pour le couplage non-intrusif. Le chapitre 4 montre quant à lui comment ces différents relèvements sont exploités dans la définition de raccord plaque/3D.



**FIGURE 2.15** – Evolution de l'erreur relative vis à vis de la référence.



# Chapitre 3

## Relèvement numérique de la solution plaque

*Ce chapitre présente une technique numérique qui s'affranchit des besoins de régularité des formules analytiques et qui permet d'obtenir, pour n'importe quelle séquence d'empilement, des distributions dans l'épaisseur d'effort et de déplacement, associées à des solutions de Saint-Venant.*

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Mise en place du problème de relèvement</b>	<b>70</b>
3.1.1	Reconstruction des efforts de section	71
3.1.2	Reconstruction du gauchissement de section	73
<b>3.2</b>	<b>Vérification des champs obtenus</b>	<b>75</b>
3.2.1	Conditions aux limites imposées	75
3.2.2	Indépendance de la position et l'orientation	77
<b>3.3</b>	<b>Implémentation et post-traitement numérique</b>	<b>82</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>

Pour effectuer le raccord 2D/3D d'un modèle plaque avec un modèle 3D, l'idée que nous privilégions est de se baser sur une technique de reconstruction de la solution 3D associée à la solution plaque, ce qui évite les difficultés de lissage de la solution éléments finis. Pour cela la stratégie retenue consiste à baser directement les raccords sur les solutions éléments finis elles-mêmes sans passer par un intermédiaire continu.

Pour reconstruire un relèvement 3D de la solution éléments finis plaque, on remarque que d'une part les techniques analytiques de relèvement sont locales dans le plan de la plaque, et d'autre part elles consistent à intégrer les équations d'équilibre 3D dans l'épaisseur en considérant que la partie plane des contraintes est une bonne approximation de la solution 3D intérieure. Cette reconstruction dans l'épaisseur ne dépend finalement que de l'empilement considéré.

À l'image des méthodes d'homogénéisation où l'on calcule les opérateurs de localisation des contraintes et des déformations à partir de problèmes-types sur une cellule de base, la démarche proposée consiste à résoudre par éléments finis des problèmes-types, caractéristiques des empilements considérés, pour des chargements associés aux différents efforts généralisés. L'idée associée à l'utilisation de solutions numériques est aussi de construire ces relèvements pour les éléments finis utilisés, et ainsi d'éviter les problèmes de transmission de champs éléments finis nodaux.

Pour éviter les problèmes d'effets de bord, ces calculs de base sont conduits sur une petite portion de plaque et le relèvement de la solution 3D est effectué suffisamment loin des bords. Notons que le même relèvement peut être également utilisé pour une coque composite puisque ici aussi les relèvements ne dépendent que de la stratification.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : la section 1 présente le problème de cellule et montre comment on en extrait les relèvements en effort et en déplacement, on vérifie à la section 2 que les champs obtenus satisfont bien certaines propriétés fondamentales nécessaires à leur utilisation pour le raccord plaque/3D, des détails sur la mise en œuvre pratique sont présentés dans la section 3.

### 3.1 Mise en place du problème de relèvement

Le modèle plaque choisi pour cette étude est un modèle de type Reissner-Mindlin. En effet, d'un point de vue numérique c'est de très loin le plus utilisé dans les codes industriels, car il offre de bonnes performances dans le calcul de plaques stratifiées (pour un comportement homogénéisé).

On va chercher, pour l'empilement étudié, à associer numériquement à la solution plaque la solution 3D d'un problème de Saint-Venant. On considère donc une cellule 3D constituée du matériau étudié, en régime élastique linéaire, avec la discrétisation éléments finis qui sera utilisée lors de la modélisation hybride.

Le modèle plaque possédant 8 efforts généralisés, on construit 8 problèmes de base avec des conditions aux limites choisies de façon à solliciter de préférence un effort généralisé comme défini dans la table 3.1 et illustré sur les figures FIG.3.1a à 3.1e. Cette méthode assure d'activer tout les couplages possibles pour un empilement quelconque.

j	Chargement	Sollicitation principale	figure
1	$\sigma_{xx} = -1$ sur $\partial\Omega_0$ , $\sigma_{xx} = 1$ on $\partial\Omega_L$	$N_{xx}$	3.1a
2	$\sigma_{xy} = -1$ sur $\partial\Omega_L$ $\sigma_{xy} = 1$ on $\partial\Omega_0$ $\sigma_{xy} = -1$ sur $\partial\Omega_a$ $\sigma_{xy} = 1$ on $\partial\Omega_{-a}$	$N_{xy}$	3.1b
3	$\sigma_{xx} = z$ sur $\partial\Omega_0$ , $\sigma_{xx} = z$ on $\partial\Omega_0$	$M_{xx}$	3.1c
4	$\sigma_{xy} = -z$ sur $\partial\Omega_0$ $\sigma_{xy} = z$ on $\partial\Omega_L$ $\sigma_{xy} = z$ sur $\partial\Omega_{-a}$ $\sigma_{xy} = -z$ on $\partial\Omega_a$	$M_{xy}$	3.1d
5	$\sigma_{xz} = 1$ sur $\partial\Omega_L$	$Q_x$	3.1e
6	même problème que 1 avec 90° rotation	$N_{yy}$	
7	même problème que 3 avec 90° rotation	$M_{yy}$	
8	même problème que 5 avec 90° rotation	$Q_y$	

TABLE 3.1 – Construction des problèmes de Saint-Venant.

Pour chaque expérience,  $j \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , on extrait  $\underline{\underline{\sigma}}_j(z)$  la distribution des contraintes 3D dans l'épaisseur au centre de la plaque, suffisamment loin des bords pour qu'elle ne soit pas perturbée par les effets de bord éventuels (la section 3.2.1 montre comment améliorer les champs en cas de cellule trop petite).

### 3.1.1 Reconstruction des efforts de section

Puisque le problème de cellule est linéaire élastique, n'importe quel chargement de Saint-Venant peut être décrit par une combinaison linéaire des  $\underline{\underline{\sigma}}_j$ , ou de manière analogue, par une combinaison linéaires d'efforts généralisés  $\mathbb{F}_i$  avec :

$$\mathbb{F} = (N_{nn} \ N_{nt} \ M_{nn} \ M_{nt} \ Q_n \ N_{tt} \ M_{tt} \ Q_t)^T \quad (3.1)$$

Cependant, le relèvement direct des contraintes des problèmes définis dans la table 3.1 ne suffit pas. La dépendance entre contraintes et efforts généralisés n'est pas directe. Il y a un couplage provenant d'une part de la relation d'équilibre dans les plaques  $\text{div}(\underline{\underline{M}}) = -\underline{\underline{T}}$ , et d'autre part de l'éventuel couplage tension/flexion pour un empilement non-symétrique.

On procède donc à un découplage des  $\underline{\underline{\sigma}}_j$  vis-à-vis des efforts généralisés  $\mathbb{F}^i$  qui sont générés par ces mêmes champs, afin de pouvoir manipuler les quantités 3D indépendamment du chargement. Les efforts généralisés au lieu du relèvement sont calculés par

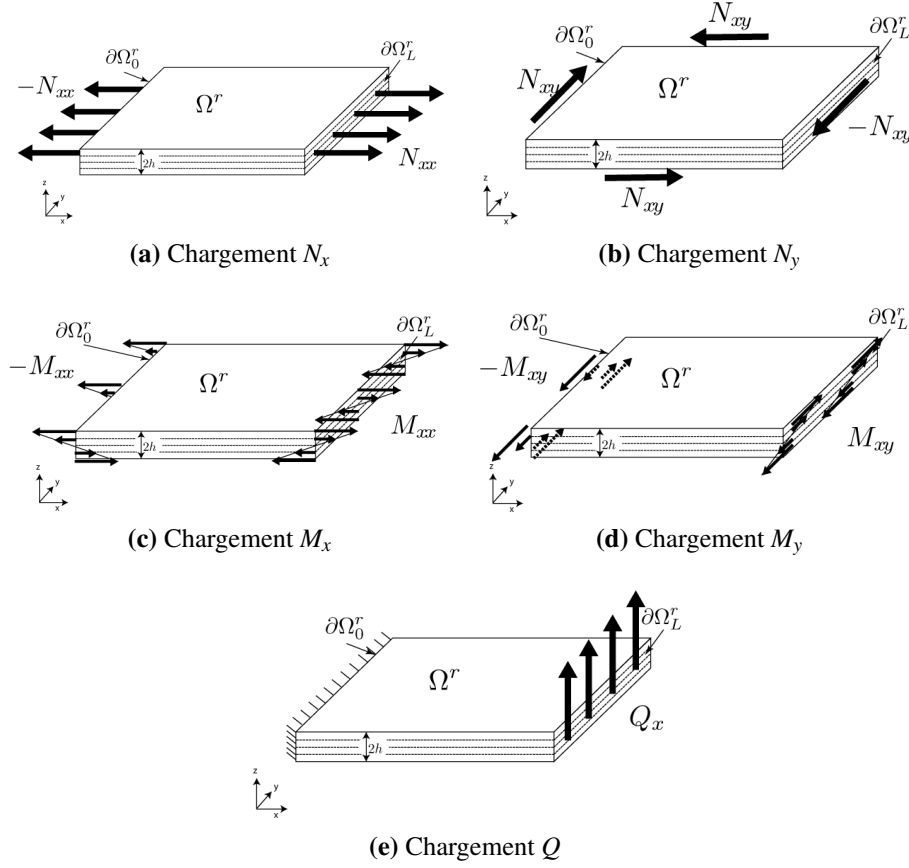


FIGURE 3.1 – Description des problèmes de relèvement.

intégration des contraintes :

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^j &= \mathbb{F}_j^1 = \int_{-h}^h \underline{e}_x \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_x dz, & M_{xx}^j &= \mathbb{F}_j^4 = \int_{-h}^h z \underline{e}_x \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_x dz \\
 N_{yy}^j &= \mathbb{F}_j^2 = \int_{-h}^h \underline{e}_y \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_y dz, & M_{yy}^j &= \mathbb{F}_j^5 = \int_{-h}^h z \underline{e}_y \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_y dz \\
 N_{xy}^j &= \mathbb{F}_j^3 = \int_{-h}^h \underline{e}_y \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_x dz, & M_{xy}^j &= \mathbb{F}_j^6 = \int_{-h}^h z \underline{e}_y \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_x dz \\
 Q_x^j &= \mathbb{F}_j^7 = \int_{-h}^h \underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_x dz, & Q_y^j &= \mathbb{F}_j^8 = \int_{-h}^h \underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}_j \cdot \underline{e}_y dz
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

On construit ainsi la famille  $\underline{\tau}_j$  définie par :

$$[\underline{\tau}_1 \quad \dots \quad \underline{\tau}_8] = [\underline{\sigma}_1 \quad \dots \quad \underline{\sigma}_8] [\mathbb{F}_j^i]^{-1} \tag{3.3}$$

où  $[\mathbb{F}_j^i]$  représente la matrice  $8 \times 8$  contenant les efforts généralisés associés à chaque chargement  $j$ .

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

Les  $(\underline{\tau}_i)$  forment une base de l'espace des solutions de Saint-Venant en contrainte et possèdent les propriétés suivantes d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \underline{\tau}_i : (\Phi_k \otimes \underline{e}_v) \rangle, & \text{pour } v = x \text{ et } i = k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \\ & & \text{ou } v = y \text{ et } (i, k) \in \{(6, 1), (7, 3), (8, 5)\} \\ 0 &= \langle \underline{\tau}_i : (\Phi_k \otimes \underline{e}_v) \rangle, & \text{dans les autres cas} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ainsi pour décrire la contrainte 3D dans la section d'un problème de Saint-Venant, il suffit d'écrire :

$$\sum_{i=1}^8 \mathbb{F}_j^i \underline{\tau}_i = \underline{\sigma}_j \quad (3.5)$$

Les graphes FIG. 3.2 donnent un exemple des allures relevées dans un cas de plaque isotrope et dans un cas avec 4 plis orthotropes orientés  $(-45/45)_s$ , dont les propriétés sont donnés dans le tableau 3.2.

Isotrope	Stratifié
$E = 2 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$	$E_L = 25 \text{ MPa}$
	$E_T = E_N = 1 \text{ MPa}$
	$G_{LT} = G_{LN} = 0.5 \text{ MPa}$
	$G_{TN} = 0.2 \text{ MPa}$
	$\nu_{LT} = \nu_{TN} = \nu_{LN} = 0.25$

TABLE 3.2 – Propriétés matériau.

### 3.1.2 Reconstruction du gauchissement de section

L'objectif de cette section est de proposer un équivalent numérique de la formule de relèvement analytique (2.5). Pour cela on exploite les problèmes de cellules précédents pour en déduire une base de gauchissement associée aux problèmes de Saint-Venant.

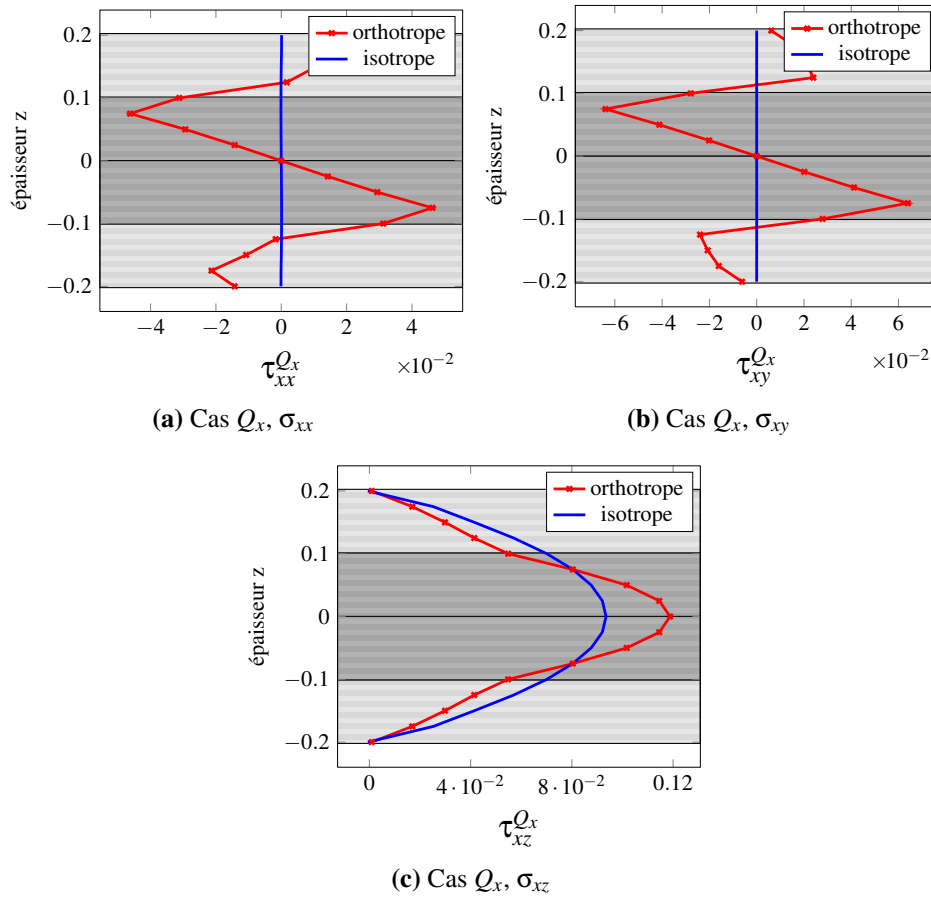
Parallèlement aux contraintes  $\underline{\sigma}_j$ , on extrait les déplacements associés à chaque problème de Saint-Venant  $\underline{U}_j$ . On a utilisé dans le cas des contraintes une matrice de découplage calculée à partir des efforts généralisés  $\mathbb{F}_j^i$ . Comme le problème de relèvement est linéaire, on utilise la même matrice de découplage pour calculer les déplacements  $\underline{u}_j$  associé à des chargements découplés.

On a alors la relation de découplage suivante :

$$[\underline{u}_1 \quad \dots \quad \underline{u}_8] = [\underline{U}_1 \quad \dots \quad \underline{U}_8] [\mathbb{F}_j^i]^{-1} \quad (3.6)$$

Comme la cinématique plaque (section rigide) peut être représentée directement dans une cinématique 3D, on écrit que le déplacement 3D  $\underline{u}_j$  associé à l'effort généralisé  $\mathbb{F}_j$  est





**FIGURE 3.2** – Distribution dans l'épaisseur des forces nodales pour un matériau isotrope ou orthotrope (stratifié).

composé d'une partie plaque  $\underline{u}_j^P$  et d'une partie complémentaire  $\underline{\mu}_j$ , appelée ici gauchissement :

$$\underline{u}_j = \underline{u}_j^P + \underline{\mu}_j \quad (3.7)$$

Afin d'identifier les deux contributions, on suppose que le mouvement plaque  $\underline{u}_j^P$  génère le même travail que dans la cinématique plaque, ou autrement dit, que les gauchissements ne travaillent pas dans les contraintes de Saint-Venant. Cette hypothèse est naturellement à rapprocher à l'équivalence en travail utilisée dans [McCune *et al.*, 2000].

De cette façon, comme chacun des déplacements  $\underline{u}_j^P$  est découplé pour n'être généré

que par un unique chargement unitaire, on utilise la projection suivante :

$$\begin{aligned} V_x^j &= \int_{-h}^h \underline{\tau}^{N_{xx}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{u}_j \, dz, & V_y^j &= \int_{-h}^h \underline{\tau}^{N_{xy}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{u}_j \, dz \\ \theta_y^j &= \int_{-h}^h \underline{\tau}^{M_{xx}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{u}_j \, dz, & \theta_x^j &= \int_{-h}^h \underline{\tau}^{M_{xy}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{u}_j \, dz \\ w^j &= \int_{-h}^h \underline{\tau}^{Q_x} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{u}_j \, dz \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec

$$\underline{u}_j^P = \begin{pmatrix} V_x^j \\ V_y^j \\ w^j \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y^j \\ \theta_x^j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Une fois ce déplacement plaque identifié, on en déduit le gauchissement par :

$$\underline{\mu}_j = \underline{u}_j - \underline{u}_j^P \quad (3.10)$$

On obtient alors les fonctions de gauchissement pour toutes les composantes des efforts, dont des exemples sont donnés sur les graphes FIG.3.3, pour un cas de plaque isotrope et un cas de plaque avec 4 plis orthotropes.

Une fois la technique de relèvement établie il est possible de l'appliquer pour tout type d'empilement, un exemple de fonctions obtenues sur un stratifié quasi-isotrope avec un empilement  $(-45/0/45/90)_{2s}$  est donné sur les figures FIG. 3.4.

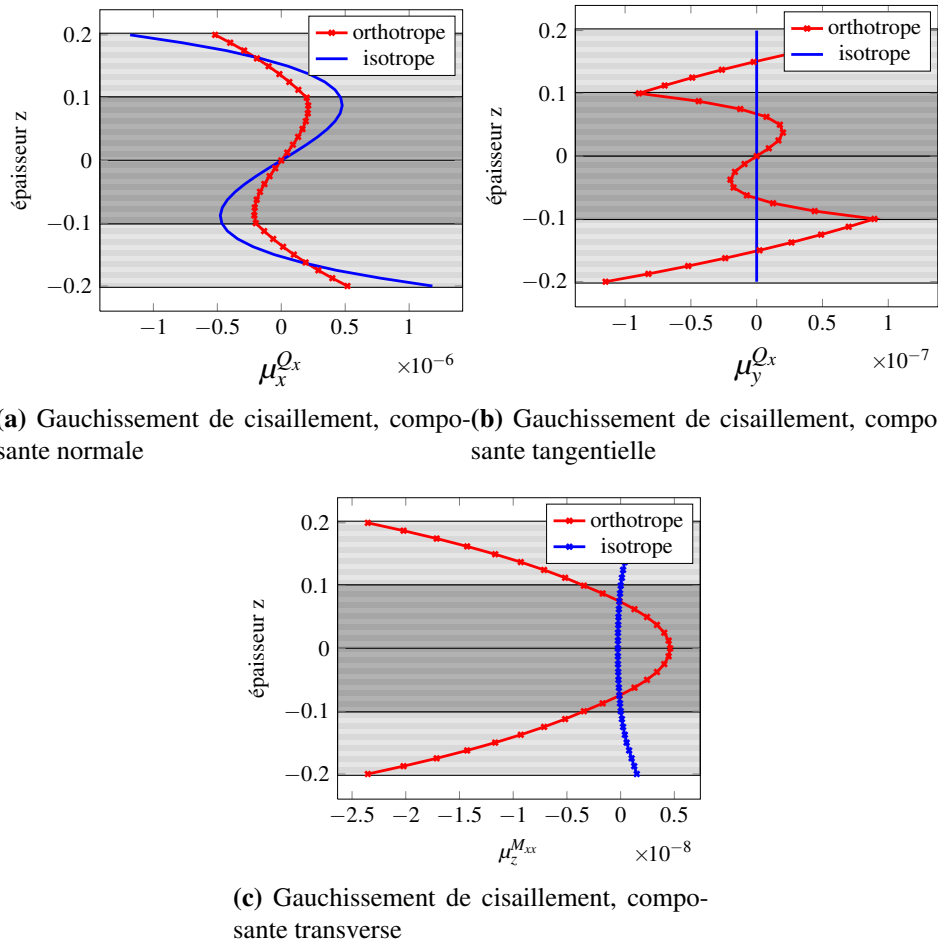
On peut remarquer qu'en général, il est beaucoup plus difficile d'obtenir analytiquement ce type de fonction pour un stratifié quelconque. Ici on retrouve l'allure de fonctions parfois prises en hypothèse dans certaines théories de plaque : déplacement zig-zag, quadratique dans l'épaisseur, cubique dans le plan [Carrera, 2003, Reddy, 1990b].

## 3.2 Vérification des champs obtenus

### 3.2.1 Conditions aux limites imposées

Les conditions limites telles que définies dans le tableau 3.1 sont imposées de façon uniforme dans une section, ce qui peut provoquer des effets de bord plus ou moins importants, par incompatibilité aux bords entre le chargement et la solution intérieure. Les effets de bord dans les composites peuvent se propager beaucoup plus loin que dans le cas de plaques isotropes, et peuvent perturber le relevé de contraintes que l'on effectue au centre de la plaque.

Une façon de gérer ce problème est de mettre en place une méthode itérative, où l'on se sert des contraintes  $\underline{\tau}$  calculées dans un premier relèvement, en tant que conditions limites améliorées pour un nouveau relèvement.



**FIGURE 3.3** – Fonctions de gauchissement extraites pour des matériaux isotrope ou orthotrope (stratifié)

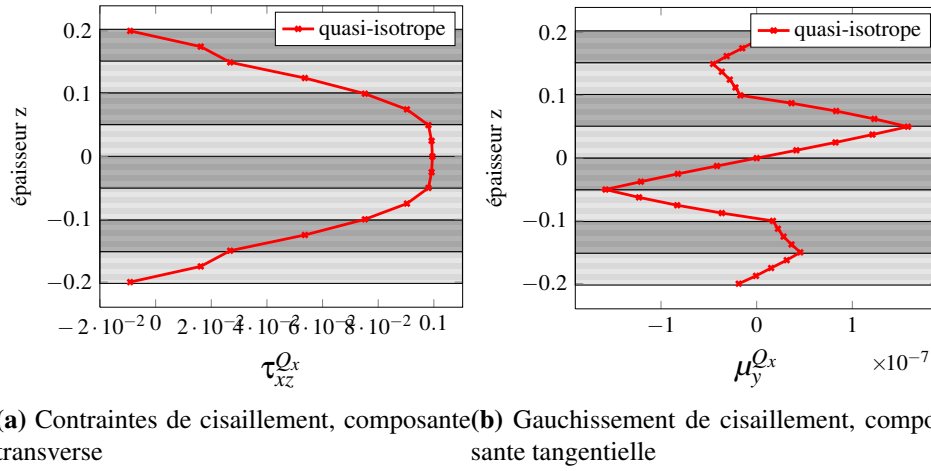
Pour les problèmes de traction et de moment purs (1,2,3,4,6), les conditions limites à appliquer sont directement les relèvements :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3.11)$$

Pour les problèmes de flexion simple  $Q_x$  et  $Q_y$ , la partie encastree du bord n'est pas modifiée et génère toujours un léger effet de bord.

Le graphe FIG. 3.5 montre la convergence rapide de la différence du relèvement entre deux itérations successives. La diminution rapide de cette différence indique que le relèvement atteint très vite une forme stable.

Sur la figure FIG. 3.6, on peut voir que les contraintes générées par les bords libres lors du chargement initial en traction, sont totalement supprimées une fois que l'on a itéré sur les conditions limites. Cela permet d'obtenir assez facilement des champs solutions plus « propres » au centre de la plaque.



**FIGURE 3.4** – Distribution dans l'épaisseur des forces nodales, et du gauchissement pour un stratifié quasi-isotrope  $(-45/0/45/90)_{2s}$ .

On peut ainsi améliorer de façon simple les fonctions relevées. Le chargement de flexion reste un peu à part, car il possède des conditions imposées de Dirichlet (l'encastrement) qui limitent la réutilisation des fonctions calculées. Cependant, étant donnée la qualité initiale des relèvements, ces itérations ne semblent pas indispensables, en particulier au-delà de la première correction.

### 3.2.2 Indépendance de la position et l'orientation

Les solutions de Saint-Venant doivent vérifier certaines propriétés, dont on s'assure de la satisfaction par les grandeurs relevées.

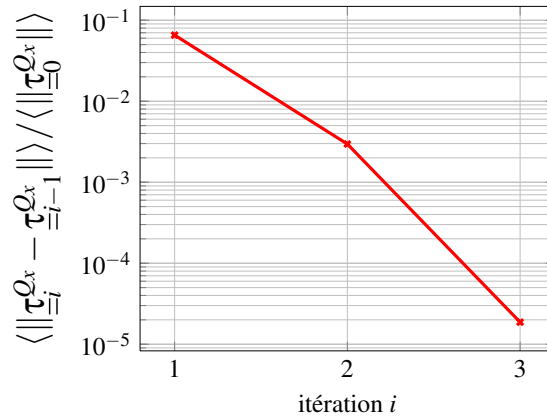
Dans un premier temps, on s'assure de la cohérence spatiale du relèvement en comparant la solution 3D à sa reconstruction en un point B différent du lieu d'extraction des relèvements A (voir le schéma FIG.3.7).

On se place dans un cas de flexion, *a priori* le plus sensible à la distance à l'encastrement, le composite stratifié orthotrope est celui utilisé lors des expériences précédentes.

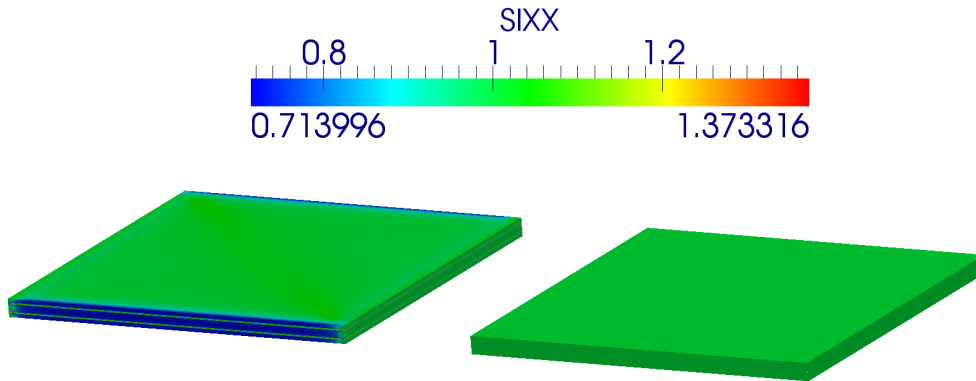
Après un calcul 3D, on calcule les efforts généralisés au point B,  $\mathbb{F}_B$ , et on en déduit un champ d'effort  $\underline{F}_B(z)$  (pour une face normale à  $\underline{e}_x$ ) et un champ de gauchissement  $\underline{W}_B(z)$  à partir des relèvements (calculés au point A) :

$$\begin{aligned} \underline{F}_B(z) &= \sum_{i=1}^8 \mathbb{F}_B^i \underline{\tau}_i^A(z) \cdot \underline{e}_x \\ \underline{W}_B(z) &= \sum_{i=1}^8 \mathbb{F}_B^i \underline{\mu}_i^A(z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

On déduit également la partie plaque du déplacement 3D par la méthode donnée en (3.8).



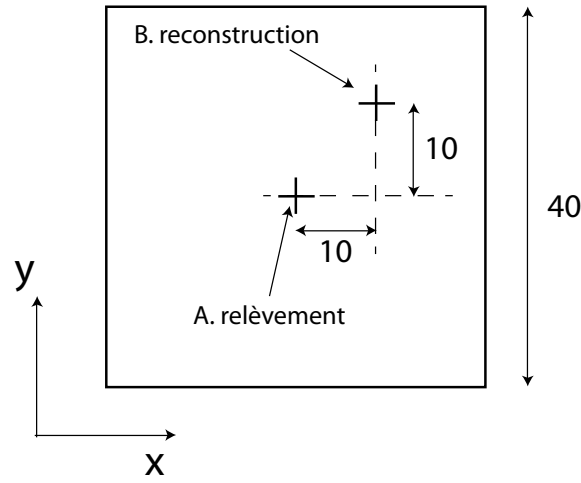
**FIGURE 3.5** – Norme de la correction sur le champ de contrainte de Saint-Venant au cours des itérations.



**FIGURE 3.6** – Représentation du champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  pour le problème-type de traction  $N_{xx}$  sur la plaque stratifiée. À gauche avec les conditions limites initiales. À droite, après itération.

Les figures FIG. 3.8 et FIG. 3.9 permettent de comparer au point B les solutions 3D et les solutions reconstruites à l'aide des relèvements. L'écart  $y$  est négligeable à l'exception de la composante  $e_y$  du gauchissement de cisaillement FIG. 3.9b. Cette faible différence pourrait provenir d'un effet de bord mal atténué. En effet on peut voir sur la figure FIG. 3.10, que les contraintes de cisaillement se propagent en profondeur dans la plaque, ce qui peut perturber le découplage des contraintes que l'on effectue, lors du calcul des fonctions de relèvement.

En pratique, comme le problème de flexion n'est pas homogène, le relèvement numérique effectué n'est pas strictement identique partout. Si on prend comme exemple un relèvement en B dont on fait une reconstruction en A, et que l'on compare à un autre relèvement effectué en  $(x = 15, y = 0)$  et dont fait une reconstruction en A, les solutions obtenues sont présentées figure FIG. 3.11. On observe un petit écart entre les deux recons-



**FIGURE 3.7** – L'extraction des fonctions est calculée en A. Puis les fonctions calculées sont utilisées pour reconstruire la solution en B. On compare finalement les quantités reconstruites des quantités relevées directement en B.

truction. Cet écart est plus faible pour le deuxième relèvement, ce qui permet dans une certaine mesure de qualifier ce relèvement de meilleur vis-à-vis de celui en B qui peut être pollué par plus d'effet de bord.

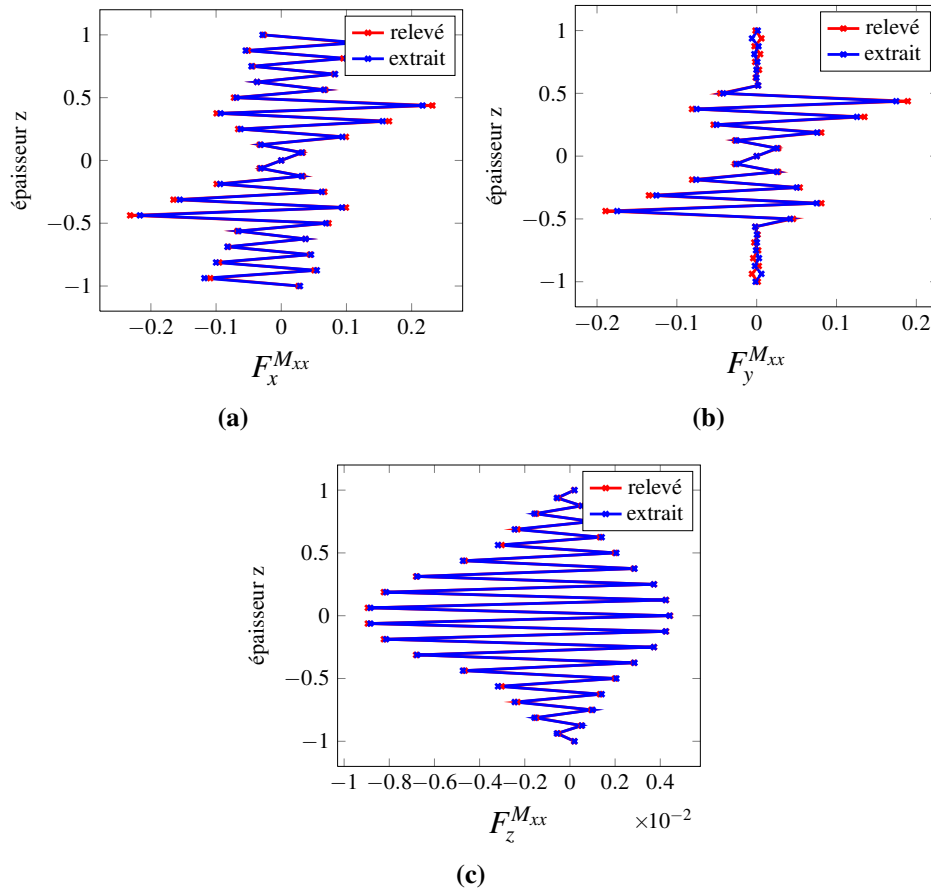
Cependant, rien ne permet de dire *a priori* où se situe le meilleur endroit pour relever la solution. Le relèvement au centre de la plaque est donc un choix par défaut, mais qui semble donner des résultats suffisants pour le raccord que l'on cherche à reconstruire.

On a donc la possibilité avec les fonctions extraites, de reconstruire localement la solution 3D (par forces nodales ou déplacement) à partir de données initiales plaque. La reconstruction des forces nodales nécessite seulement la connaissance des efforts généralisés, celle du déplacement 3D requiert en plus la connaissance du déplacement plaque.

Un autre aspect du relèvement est sa dépendance vis-à-vis de l'orientation du chargement. Pour des raisons pratiques, la famille de tenseur  $\underline{\underline{\tau}}^i$  est calculée pour des sollicitations alignées avec les axes  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ . Au besoin une famille de tenseurs alignés avec une base locale  $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{e}_z)$  peut être déduite. Si on pose :

$$\underline{n} = n_x \underline{e}_x + n_y \underline{e}_y \quad (3.13)$$

$$\underline{t} = -n_y \underline{e}_x + n_x \underline{e}_y \quad (3.14)$$



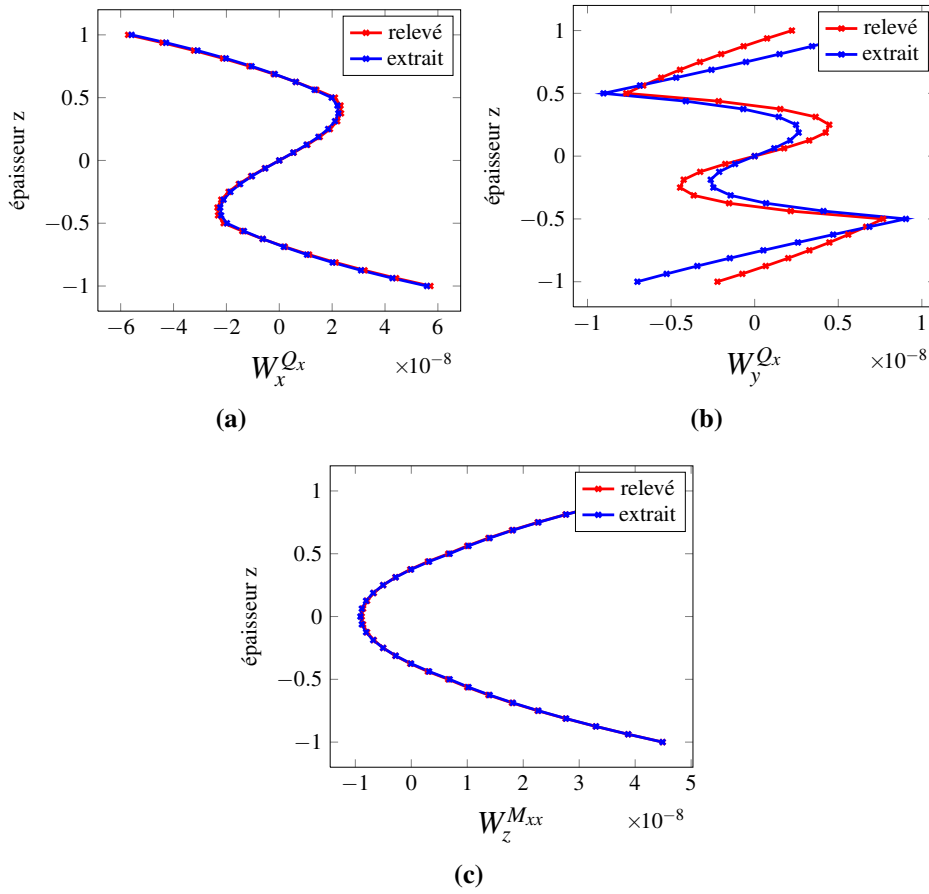
**FIGURE 3.8** – Comparaison des distributions des forces nodales au point B entre calcul 3D et reconstruction.

Par linéarité entre les solutions de Saint-Venant et les sollicitations, on a :

$$\begin{aligned}
 \tau_{N_{nn}} &= n_x^2 \tau_{N_{xx}} + n_x n_y \tau_{N_{xy}} + n_y^2 \tau_{N_{yy}} \\
 \tau_{N_{nt}} &= -n_x n_y \tau_{N_{xx}} + (n_x^2 - n_y^2) \tau_{N_{xy}} + n_y n_x \tau_{N_{yy}} \\
 \tau_{N_{tt}} &= n_y^2 \tau_{N_{xx}} - n_x n_y \tau_{N_{xy}} + n_x^2 \tau_{N_{yy}} \\
 \tau_{M_{nn}} &= n_x^2 \tau_{M_{xx}} + n_x n_y \tau_{M_{xy}} + n_y^2 \tau_{M_{yy}} \\
 \tau_{M_{nt}} &= -n_x n_y \tau_{M_{xx}} + (n_x^2 - n_y^2) \tau_{M_{xy}} + n_y n_x \tau_{M_{yy}} \\
 \tau_{Q_n} &= n_x \tau_{Q_x} + n_y \tau_{Q_y}, \quad \tau_{Q_t} = -n_y \tau_{Q_x} + n_x \tau_{Q_y}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

On peut ainsi reconstruire les contraintes 3D pour toute orientation de sollicitation.

Concernant le gauchissement, un problème est posé lors de la détermination de la composante plaque dans un déplacement 3D (3.8). En effet on utilise uniquement les 5 premiers relèvements de Saint-Venant pour projeter, établir une équivalence en travail et



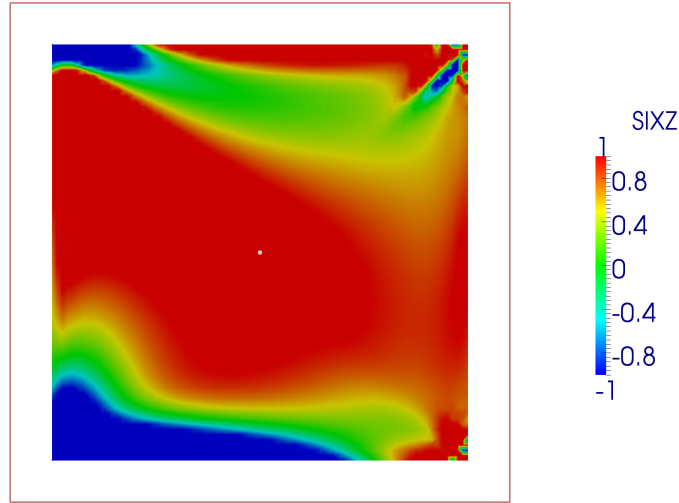
**FIGURE 3.9** – Comparaison des distributions du gauchissement au point B entre calcul 3D et reconstruction.

déduire la cinématique plaque. Cette définition est suffisante car implicitement, l'ajout d'une correction dans la direction de l'épaisseur produit une erreur sur les contraintes de l'ordre de  $O(\sigma_{xx} \frac{h}{L})$  et l'ajout de gauchissement dans le plan diminue cette erreur à un ordre de  $O(\sigma_{xx} \frac{h^2}{L^2})$ . On estime ainsi que l'on a « au moins » les ordres de grandeur suivants dans les relations implicites liant les projections des contraintes de Saint-Venant travaillant dans les champs de gauchissement :

$$\left. \begin{aligned}
 \langle (\underline{\tau}_{N_{xx}} \cdot \underline{e}_x - \underline{\tau}_{N_{xy}} \cdot \underline{e}_y) \cdot \underline{U}_i \rangle &= \langle (\underline{\tau}_{N_{xy}} \cdot \underline{e}_x - \underline{\tau}_{N_{yy}} \cdot \underline{e}_y) \cdot \underline{U}_i \rangle = o(h^2/L^2)(\underline{N}_j : \underline{\gamma}_i) \\
 \langle (\underline{\tau}_{M_{xx}} \cdot \underline{e}_x - \underline{\tau}_{M_{xy}} \cdot \underline{e}_y) \cdot \underline{U}_i \rangle &= \langle (\underline{\tau}_{M_{xy}} \cdot \underline{e}_x - \underline{\tau}_{M_{yy}} \cdot \underline{e}_y) \cdot \underline{U}_i \rangle = o(h^2/L^2)(\underline{M}_k : \underline{\chi}_i) \\
 \langle (\underline{\tau}_{Q_x} \cdot \underline{e}_x - \underline{\tau}_{Q_y} \cdot \underline{e}_y) \cdot \underline{U}_i \rangle &= o(h/L)(\underline{Q}_l : \underline{\varepsilon}_{ci})
 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y\}, \quad \forall j \in \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\}, \\
 \forall k \in \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}, \quad \forall l \in \{Q_x, Q_y\}
 \end{aligned}$$





**FIGURE 3.10** – Contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  dans une coupe en  $z = 0$  pour le problème type de flexion  $Q_x$  (plaque stratifiée).

### 3.3 Implémentation et post-traitement numérique

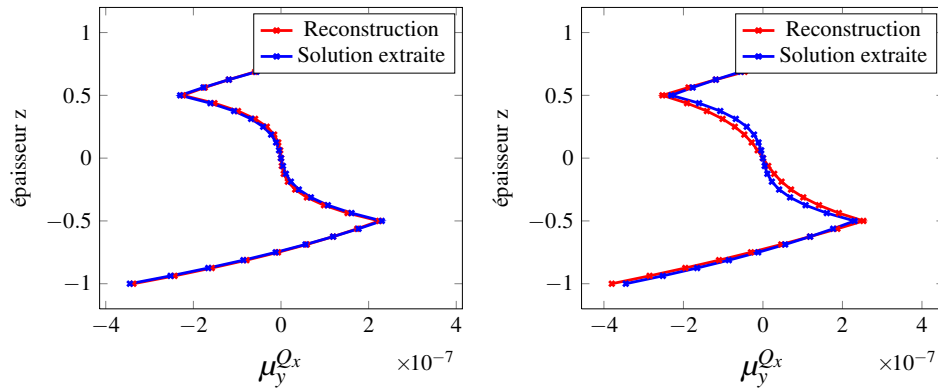
Pour des raisons pratiques, on préfère travailler avec des forces nodales plutôt qu’avec des contraintes. On évite ainsi l’extrapolation des contraintes aux nœuds et on facilite l’implémentation quel que soit le raccord choisi. Le schéma FIG. 3.12 représente le principe de l’extraction des forces nodales. Un domaine composé de plusieurs colonnes d’éléments est sélectionné, puis les forces nodales sont extraites sur le bord de ce domaine.

Le principal problème de l’utilisation de forces nodales sur un maillage quadratique provient du fait que les colonnes de nœuds ne sont pas équivalentes dans le cas d’éléments incomplets (Hexaèdre à 20 nœuds ici), il y a des colonnes de nœuds sommets et milieux, et des colonnes seulement de nœuds milieux.

Ce problème est géré en considérant deux relèvements, l’un sur les colonnes de nœuds du premier type, et l’autre sur des colonnes de nœuds du second type. Ce procédé n’est pas très contraignant car dans le Code\_Aster les forces nodales sont calculées par post-traitement, on obtient les forces nodales sur le bord d’un domaine sur lequel on connaît les contraintes aux points de Gauss, le passage aux forces nodales s’effectue par la relation :

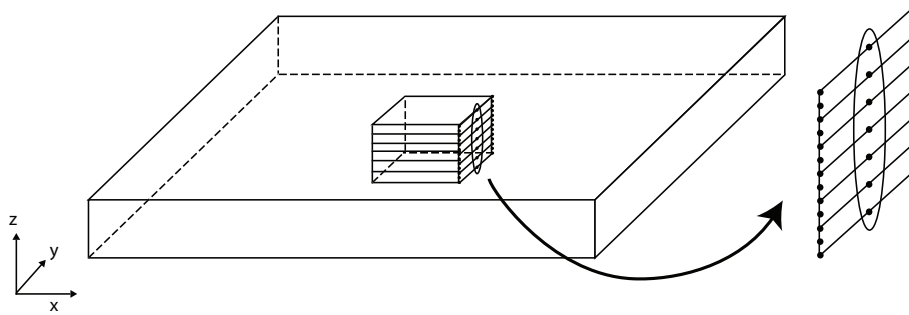
$$F_K = \int_K B^t \sigma^K dK \quad (3.17)$$

Où  $K$  est un ensemble d’éléments,  $B^t$  l’opérateur éléments finis de déformations généralisées et  $\sigma^K$  les contraintes. En pratique ces grandeurs sont connues aux points de Gauss des éléments de  $K$  et l’intégration est exacte pour des éléments droits. On a ainsi les forces nodales sur toutes les faces du bord de  $K$ .



(a) Relèvement en  $x = 15$   $y = 0$  et reconstruction en A (b) Relèvement en B reconstruction en A

**FIGURE 3.11** – Comparaison de reconstruction à partir de deux relèvements à des emplacements différents.



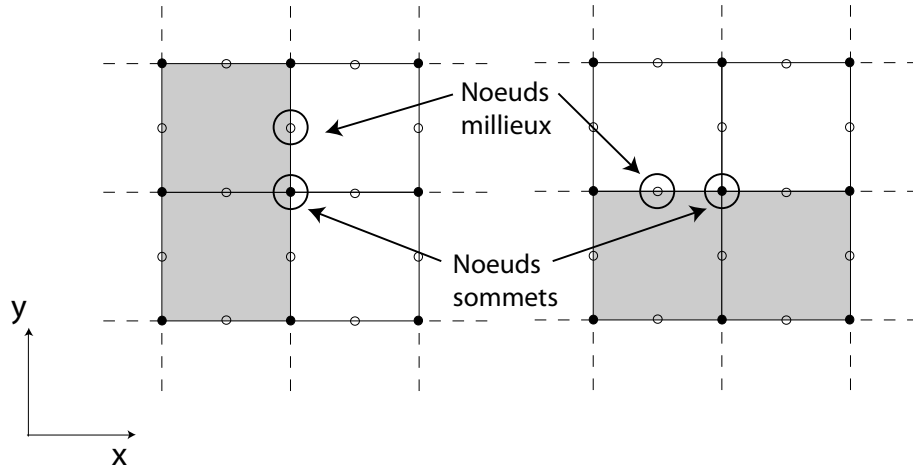
**FIGURE 3.12** – Schéma de principe de l'extraction des forces nodales à l'intérieur de la portion de plaque.

Un autre problème est la représentation de toutes les composantes de l'effort, car les forces nodales sont extraites sur une surface et donc liées à une orientation, ainsi on ne peut représenter que 5 efforts généralisés sur une face. Ce problème est résolu en considérant une deuxième orientation, orthogonale à la première.

Ainsi, dans un cas quadratique, on extrait les forces nodales des différents résultats selon deux orientations, et à différentes positions représentées sur la figure FIG. 3.13.

*Remarque.* On peut noter que l'on extrait sur deux colonnes d'éléments pour obtenir des forces nodales « assemblées », cela évite d'avoir à effectuer l'assemblage au moment du raccord.

On a vu que pour que le relèvement soit bien défini, il était nécessaire que la cinématique plaque, c'est-à-dire mouvement rigide de la section, soit contenue dans la cinématique 3D. Cette propriété est toujours respectée lors de la création du modèle 3D, car un élément 3D peut représenter exactement un champ de déplacement linéaire dans l'épaisseur de la plaque. Il est également possible de déduire directement les efforts généralisés



**FIGURE 3.13** – Représentation des deux post-traitements : les zones grisées correspondent au domaine sur lequel on extrait les forces nodales.

en sommant les forces nodales le long d'une colonne de nœuds. Les matrices de couplage que l'on définit sont ainsi égales à :

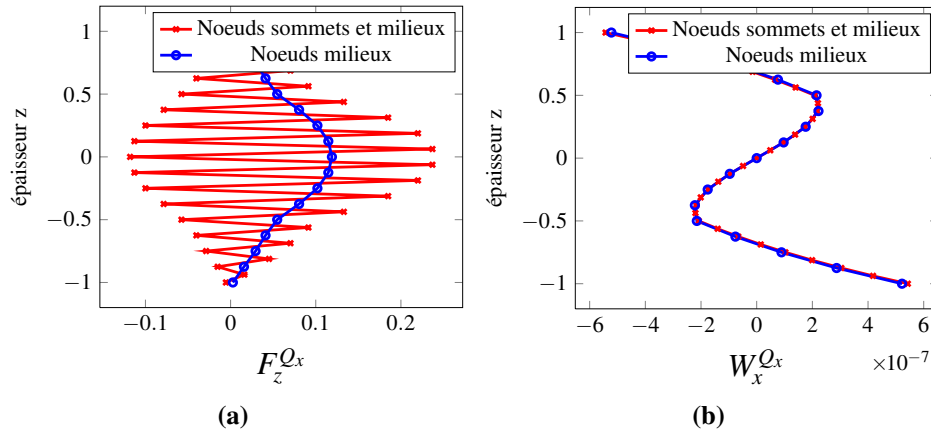
$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma F_{x,L1}^i & \Sigma F_{y,L2}^i & \Sigma F_{y,L1}^i & \Sigma zF_{x,L1}^i & \Sigma zF_{y,L2}^i & \Sigma zF_{y,L1}^i & \Sigma F_{z,L1}^i & \Sigma F_{z,L2}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}^T \quad (3.18)$$

Avec les  $\bullet_{L1}$  pour la première orientation, et  $\bullet_{L2}$  pour la deuxième orientation.

Contrairement aux relèvements des forces nodales, le relèvement des gauchissements ne dépend pas du type de colonne considéré FIG. 3.14. Pour le relèvement des gauchissements, on ne conservera donc que la colonne la mieux discrétisée, c'est-à-dire celle contenant les nœuds sommets et milieux.

### 3.4 Conclusion

La technique de relèvement proposée est basée sur le calcul numérique d'une portion de plaque, composée du même matériau et de la même discrétisation que ceux du domaine où l'on veut opérer le couplage. On obtient ainsi de façon « automatique » un ensemble de fonctions correspondant à des distributions dans la section de contraintes et des déplacements, associées à un problème de Saint-Venant selon chaque effort généralisé. Le coût de calcul de ces solutions peut être non négligeable mais il n'est requis qu'une fois pour un matériau donné, de plus les chargements peuvent être traités comme des seconds membres multiples d'une même matrice factorisée ce qui accélère la résolution des problèmes-type. Il est ainsi possible de constituer une « base de données » des fonctions de relèvement selon l'empilement utilisé.



**FIGURE 3.14** – Comparaison des fonctions relevées sur les deux types de colonnes pour un maillage quadratique.

Comme le reste de la stratégie, l'approche est non-intrusive car l'obtention de ces fonctions ne nécessite aucun ajout de fonctionnalité au code éléments finis. Et comme les données extraites sont simplement des déplacements et efforts nodaux, il est facile de les importer et exporter d'un logiciel à un autre.

Le chapitre suivant montre comment ces relevements sont utilisés pour définir différents raccords entre modèles plaque et 3D.



## Chapitre 4

# Mise en place d'un raccord plaque/3D : comparaison de différentes stratégies numériques

*Dans ce chapitre, on propose différentes approches pour raccorder le modèle plaque au modèle 3D, en utilisant les relèvements numériques définis au chapitre précédent.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Application des conditions limites 3D associées aux relèvements . . . . .</b>	<b>88</b>
4.1.1	Raccord en effort . . . . .	89
4.1.2	Raccord en travail équivalent . . . . .	90
4.1.3	Raccord en déplacement . . . . .	94
4.1.4	Résumé de ces approches . . . . .	96
<b>4.2</b>	<b>Illustration de ces approches sur un exemple simple . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>4.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>99</b>

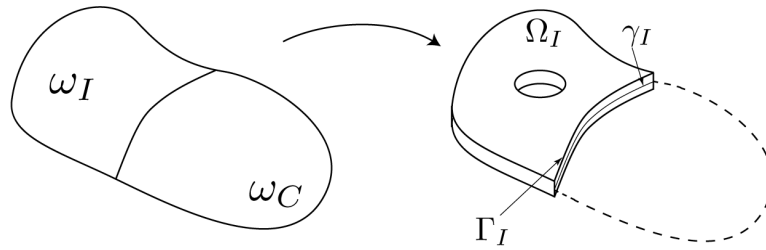
---

## 4.1 Application des conditions limites 3D associées aux relèvements

Trois approches sont étudiées :

- Une approche en efforts imposés, où les forces nodales sont reconstruites à partir des efforts généralisés plaque ;
- Une approche en travail équivalent, où quelques relations linéaires entre degrés de liberté 3D sont imposées, de manière à ce que la moyenne pondérée des déplacements 3D égale la cinématique plaque ;
- Une approche en déplacement imposé, où le déplacement 3D est reconstruit à partir du déplacement et des efforts généralisés plaque.

Ces trois méthodes sont de natures différentes (respectivement : Neumann, mixte<sup>1</sup>, Dirichlet), mais sont toutes basées sur les mêmes fonctions de relèvement définies précédemment, en contrainte ( $\underline{\tau}_i$ ) et en gauchissement ( $\underline{\mu}_i$ ), adaptées à l'empilement étudié. Les conditions aux limites sont évaluées pour leur qualité intrinsèque et leur aptitude à s'insérer dans la stratégie de couplage non-intrusif.



**FIGURE 4.1** – Exploitation du calcul plaque et imposition des conditions limites associées.

On suppose qu'un calcul plaque initial a été effectué et que l'on dispose de la solution plaque  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{V}$  sur  $\gamma_I$  FIG. 4.1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= (N_{xx} \ N_{xy} \ M_{xx} \ M_{xy} \ Q_x \ N_{yy} \ M_{yy} \ Q_y)^T \\ \mathbb{V} &= (V_x \ V_y \ \theta_y \ \theta_x \ w)^T \end{aligned} \quad (4.1)$$

La section suivante présente les trois techniques de définition de conditions limites 3D sur  $\Gamma_I = \gamma_I \times [-h, h]$  ;  $\gamma_I$  est muni d'une abscisse curviligne  $s$  et d'une normale extérieure à la zone d'intérêt  $\underline{n}$ .

Afin de simplifier les expressions, on supposera que la zone d'intérêt  $\Omega_I$  est soumise à des efforts volumiques et surfaciques (en dehors de  $\Gamma_I$ ) nuls. On notera  $\mathcal{U}(\Omega_I)$  l'espace des déplacements admissibles (hors conditions d'interface) et  $\mathcal{U}_0(\Omega_I)$  l'espace vectoriel associé.

1. Ici mixte ne se réfère pas aux conditions de Robin, mais à l'application sur des composantes différentes d'un même bord d'efforts et de déplacements

### 4.1.1 Raccord en effort

#### 4.1.1.1 Définition

Le raccord le plus direct à construire est un raccord en effort pur. Il consiste à poser :

$$\underline{\underline{\sigma}}(s, z) \cdot \underline{n}(s) = \sum_{i=1}^8 \mathbb{F}_i(s) \underline{\underline{\tau}}_i(z) \cdot \underline{n} \quad (4.2)$$

Les efforts extérieurs sont donc une combinaison linéaire des relèvements en contrainte dans la direction normale, pondérée par les efforts généralisés plaque.

Il convient de noter deux restrictions à cette approche :

- cette condition limite n'est utilisable que dans les cas où le domaine  $\Omega_I$  possède suffisamment de condition de Dirichlet pour bloquer les mouvements de corps rigide ;
- dans le cadre de l'approche non-intrusive, ce raccord nécessite d'utiliser l'approche avec recouvrement développée dans cette thèse, et présentée à la section 5.2.2.

Ainsi le problème à résoudre s'écrit : trouver  $\underline{U}^{3D} \in \mathcal{U}(\Omega_I)$  tel que  $\forall \underline{U}^{3D*} \in \mathcal{U}_0(\Omega_I)$  :

$$\int_{\Omega_I} (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^{3D}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^{3D*})) dx = \int_{\Gamma_I} \sum_{i=1}^8 \mathbb{F}_i(s) (\underline{\underline{\tau}}_i(z) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U}^{3D*} ds dz \quad (4.3)$$

#### 4.1.1.2 Mise en œuvre

Pour des raisons pratiques, on choisit d'imposer cette condition par des efforts nodaux sur  $\Gamma_I$ . En effet, imposer des efforts nodaux est équivalent à utiliser des contraintes surfaciques, mais permet d'éviter le transfert des champs de contraintes aux points de Gauss, et simplifie donc la procédure d'écriture du raccord. Cependant, cela impose d'avoir effectué le relèvement sur un domaine où la discrétisation et la nature des éléments (linéaire ou quadratique) sont les mêmes que dans  $\Omega_I$ .

Dans le Code\_Aster, les fonctions obtenues par le relèvement sont stockées dans un fichier qui est appelé au moment du calcul. Les nœuds de l'interface sont regroupés par colonne, et dans le cas d'un maillage quadratique, on identifie s'il s'agit d'une colonne de nœuds milieux (intermédiaire) ou une colonne de nœuds sommets et milieux (pleine).

Les chargements par forces nodales sont directement additionnés par l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA()`, on construit donc 8 chargements par colonne de nœuds chacun correspondant à un relèvement pondéré par  $\mathbb{F}^i(x)$ , qui représentent les efforts plaques au lieu du raccord.

$$\mathbf{F} = \beta \sum_{i=1}^8 \mathbb{F}^i(s) \underline{\underline{\tau}}_i(z) \cdot \underline{e}_x \quad (4.4)$$

Le coefficient multiplicatif  $\beta$  dépend du type de la colonne de nœuds car la somme des forces nodales n'est pas la même selon que l'on considère une colonne pleine ou une colonne intermédiaire. Le calcul de ce coefficient est détaillé dans l'annexe B. On montre que dans le cas linéaire aucun coefficient particulier n'est nécessaire (on prend  $\beta = 1$ ),



mais dans le cas quadratique, quand un élément HEXA20 est en vis à vis de 2 éléments plaque de taille  $l$ , on prend  $\beta = \frac{2}{3l}$  pour une colonne de nœuds sommets et milieux et  $\beta = \frac{4}{3l}$  pour une colonne de nœuds milieux.

## 4.1.2 Raccord en travail équivalent

### 4.1.2.1 Définition

Cette approche est une extension de celle proposée [McCune *et al.*, 2000] qui dans le cas de plaques isotropes utilise la forme analytique connue des contraintes. Pour généraliser à des empilements de plis orthotropes, dont on ne connaît pas *a priori* l'allure des contraintes dans l'épaisseur, on utilise le relèvement numérique en effort précédemment défini.

*Remarque.* Cette condition limite doit être écrite dans le repère local  $(\underline{n}, \underline{t})$  de l'interface. Les opérateurs nécessaires ont été introduits dans le chapitre précédent (notamment contraintes pour des chargements de Saint-Venant quelconques (3.15)), aussi afin de simplifier l'écriture, on suppose ici que l'on travaille sur une normale de direction constante  $\underline{e}_x$ .

Le principe de ce raccord est que le déplacement 3D  $\underline{U}^{3D}$  doit développer le même travail que le déplacement plaque  $\underline{U}^P$  dans les champs d'efforts prédéterminés  $(\underline{\tau}_i \cdot \underline{n})$  :

$$\int_{\Gamma} \underline{\tau}_i \cdot \underline{e}_x \cdot (\underline{U}^{3D} - \underline{U}^P) d\Gamma = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \quad (4.5)$$

L'avantage du relèvement utilisé est qu'il découple les composantes de  $\underline{\tau}$  selon chaque effort généralisé et on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \underline{\tau}^{N_{xx}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{U}^{3D} dz &= V_x, & \int_{-h}^h \underline{\tau}^{N_{xy}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{U}^{3D} dz &= V_y \\ \int_{-h}^h \underline{\tau}^{M_{xx}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{U}^{3D} dz &= \theta_y, & \int_{-h}^h \underline{\tau}^{M_{xy}} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{U}^{3D} dz &= \theta_x \\ \int_{-h}^h \underline{\tau}^{Q_x} \cdot \underline{e}_x \cdot \underline{U}^{3D} dz &= w \end{aligned} \quad (4.6)$$

On note que sur les 8 efforts généralisés, on n'en utilise que 5 pour construire les relations linéaires. Les 3 efforts généralisés restant ne travaillent pas dans la section pour un mouvement plaque et ne sont donc pas pris en compte. Cependant il a été observé une forte perturbation à l'interface dans le cas des plaques stratifiées. L'ajout de la contribution des efforts généralisés additionnels  $(N_{yy}, M_{yy}, Q_y)$  par des forces nodales imposées (comme pour le raccord en effort décrit précédemment) permet de diminuer fortement cette perturbation.

Ainsi le problème à résoudre s'écrit finalement à l'aide de multiplicateurs de Lagrange évoluant dans l'espace  $\Lambda_I$  : trouver  $(\underline{U}^{3D}, \lambda_k) \in \mathcal{U}(\Omega_I) \times \Lambda_I$  tel que  $\forall \underline{U}^{3D*} \in \mathcal{U}_0(\Omega_I)$  et

$\forall \lambda_k^* \in \Lambda_I$  avec  $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(U^{3D}) : \underline{\underline{\mathbb{H}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(U^{3D*}) d\Omega - \sum_{k=1}^5 \int_{\Gamma_I} \lambda_k \int_{-h}^h (\underline{\underline{\tau}}^k \cdot \underline{\underline{e}}_x) \cdot \underline{\underline{U}}^{3D*} dz ds = \\ \int_{\Gamma_I} \mathbb{F}_k \int_{-h}^h \sum_{k=6}^8 (\underline{\underline{\tau}}^k \cdot \underline{\underline{e}}_x) \cdot \underline{\underline{U}}^{3D*} dz ds \\ \int_{\Gamma_I} \lambda_k^* \left( \int_{-h}^h (\underline{\underline{\tau}}^k \cdot \underline{\underline{e}}_x) \cdot \underline{\underline{U}}^{3D} dz - \underline{\underline{U}}^P \right) ds = 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_k$  sont définis sur l'interface et peuvent être interprétés comme les efforts généralisés équilibrant le travail à l'interface. Cette information est utile à la stratégie de couplage non-intrusive mais n'est pas une sortie standard des codes de calcul. Ils peuvent cependant aussi être retrouvés par intégration de la contrainte dans l'épaisseur.

*Remarque.* Le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda_I$  et de sa discrétisation n'est pas anodin ; la section suivante montre que des instabilités, typiques des formulations mixtes, peuvent être observées dans certaines configurations.

#### 4.1.2.2 Problème d'instabilité

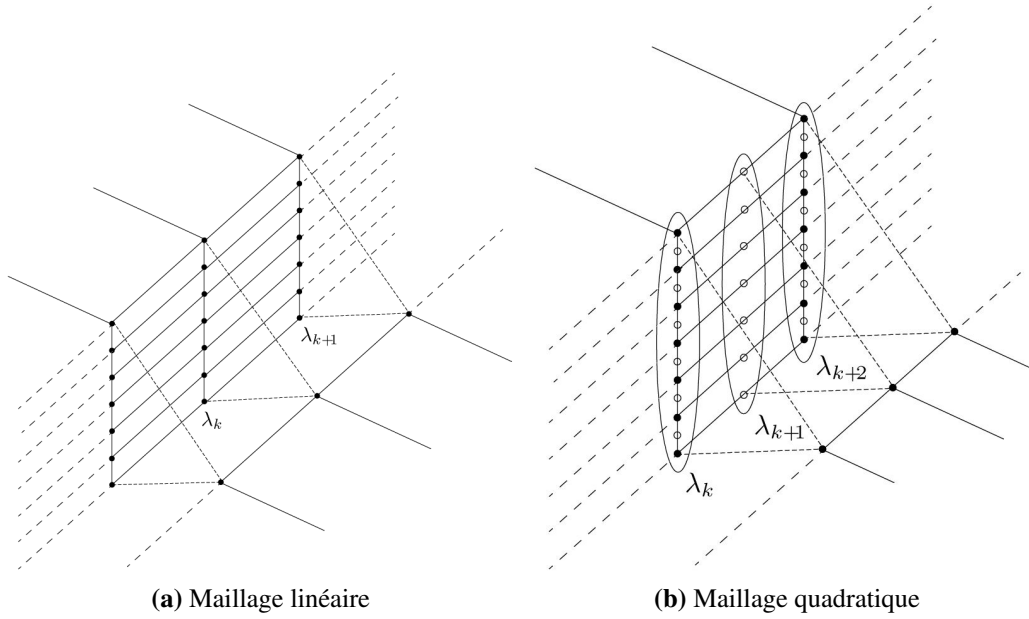
Le principal problème de ce raccord mixte est qu'il nécessite des précautions particulières quant au choix de la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange.

Lors des différents essais, deux types de maillage 3D ont été utilisés, linéaire ou quadratique, les éléments plaque étant linéaires sur toutes leurs composantes. Dans le cas linéaire, les colonnes sont toutes de même type et on raccorde nœud-à-nœud avec une colonne d'éléments 3D en vis à vis d'un élément plaque, voir la figure FIG. 4.2a. Dans le cas d'un maillage quadratique, les colonnes ont des supports différents et il existe des nœuds milieux, on double alors la discrétisation plaque, et on a donc deux éléments plaque en vis à vis d'une colonne d'élément 3D, voir la figure FIG. 4.2b.

Pour un maillage quadratique, on a pu observer des instabilités qui n'étaient pas présentes dans le cas linéaire. Ces instabilités sont illustrées ici par de fortes oscillations des  $\lambda_k$  à l'interface FIG. 4.3, en particulier sur la composante de cisaillement  $Q_x$ .

Ces phénomènes d'oscillations sont relativement classiques dans les problèmes mixtes, et correspondent à une mauvaise vérification de la condition de stabilité inf-sup (ou LBB) [Fortin et Brezzi, 1991].

Dans le cas d'éléments linéaires, la discrétisation de  $\Gamma_I$  en « peignes de Dirac » (notée  $\delta(\Gamma)$ ) qui fait directement correspondre une colonne de nœuds 3D à un nœud plaque fonctionne. Dans le cas d'éléments quadratiques une telle discrétisation (FIG. 4.2b) est trop riche et il convient d'utiliser un espace de discrétisation  $P(0)$  c'est à dire appliquant par bande d'éléments les relations linéaires, comme représenté sur le schéma FIG. 4.4. On s'assure alors que la moyenne le long de l'interface du déplacement 3D sur une colonne d'éléments est égale aux composantes plaque du nœud milieu.



**FIGURE 4.2** – Support d'application des multiplicateurs de Lagrange  $\delta(\Gamma)$ .

Néanmoins ce choix un peu grossier, qui ne transmet qu'en moyenne l'information plaque, conduit à des perturbations aux bouts de l'interface.

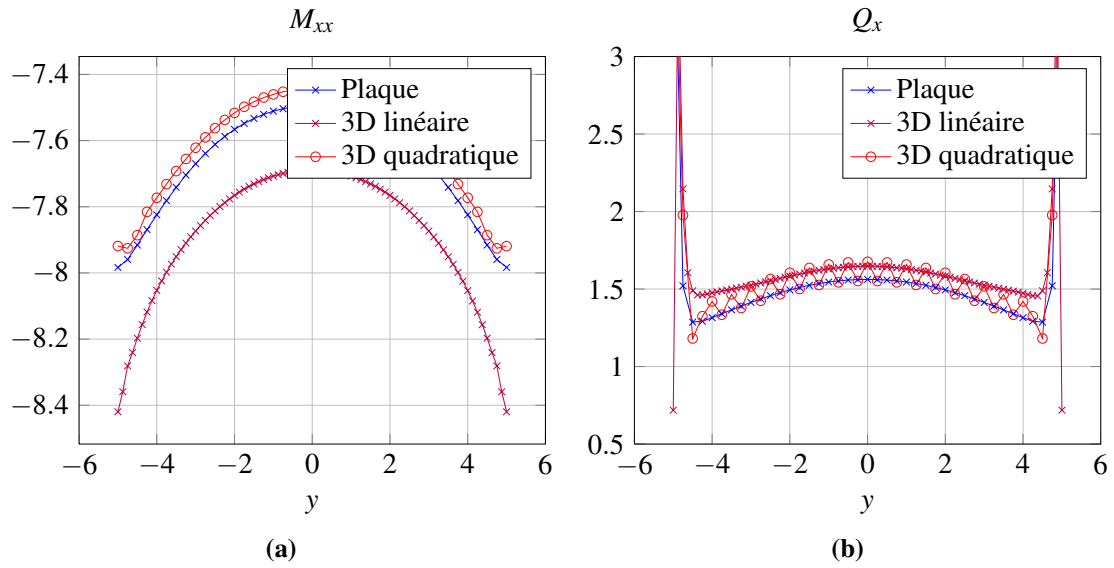
#### 4.1.2.3 Mise en œuvre

Numériquement, la construction d'un tel raccord consiste à créer sur l'interface des relations pour chaque degré de liberté plaque avec une colonne de nœuds 3D, puis d'introduire des multiplicateurs de Lagrange de façon à imposer le déplacement voulu. Cela revient donc à créer la matrice  $A$  dans le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_I & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}^{3D} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{F}} \\ \underline{U}^P \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec  $K_I$  la matrice de rigidité du modèle local,  $\underline{\tilde{F}}$  contient les forces extérieures appliquées sur le modèle local ainsi que les forces nodales correspondants aux efforts  $N_{yy}$ ,  $M_{yy}$  et  $Q_y$ ,  $\underline{U}^P$  les déplacements plaque le long de l'interface.

La construction de ce raccord s'effectue par colonne de nœuds (ou colonne d'éléments). Ainsi pour une colonne de nœuds de l'interface, les relations linéaires peuvent



**FIGURE 4.3** – Illustration des instabilités sur les efforts généralisés (plaque isotrope).

s'écrire comme :

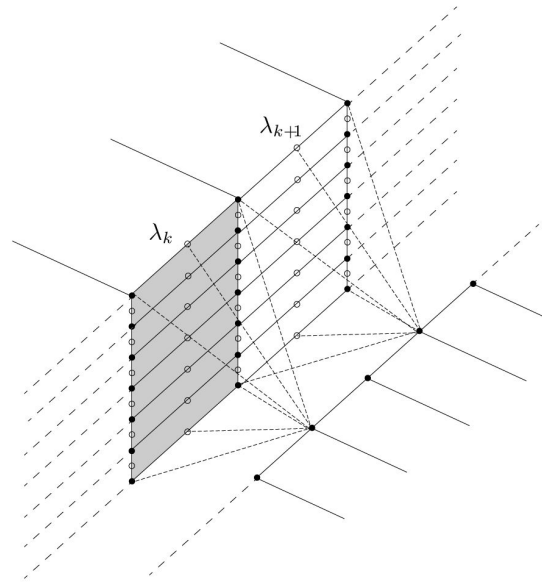
$$\begin{bmatrix}
 F_{x1}^{N_{xx}} & F_{x1}^{N_{xy}} & F_{x1}^{M_{xx}} & F_{x1}^{M_{xy}} & F_{x1}^{Q_x} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 F_{xk}^{N_{xx}} & F_{xk}^{N_{xy}} & F_{xk}^{M_{xx}} & F_{xk}^{M_{xy}} & F_{xk}^{Q_x} \\
 F_{y1}^{N_{xx}} & F_{y1}^{N_{xy}} & F_{y1}^{M_{xx}} & F_{y1}^{M_{xy}} & F_{y1}^{Q_x} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 F_{yk}^{N_{xx}} & F_{yk}^{N_{xy}} & F_{yk}^{M_{xx}} & F_{yk}^{M_{xy}} & F_{yk}^{Q_x} \\
 F_{z1}^{N_{xx}} & F_{z1}^{N_{xy}} & F_{z1}^{M_{xx}} & F_{z1}^{M_{xy}} & F_{z1}^{Q_x} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 F_{zk}^{N_{xx}} & F_{zk}^{N_{xy}} & F_{zk}^{M_{xx}} & F_{zk}^{M_{xy}} & F_{zk}^{Q_x}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_{x1} \\
 \vdots \\
 U_{xk} \\
 U_{y1} \\
 \vdots \\
 U_{yk} \\
 U_{z1} \\
 \vdots \\
 U_{zk}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 V_x \\
 V_y \\
 \theta_y \\
 \theta_x \\
 w
 \end{pmatrix}
 \quad (4.9)$$

où  $k$  est le nombre de nœuds dans la colonne, et  $F^i$  correspond au relèvement en effort pour le chargement  $i$ .

La création de ce raccord dans le Code\_Aster suit les étapes suivantes :

1. Appel des fonctions préalablement définies par le relèvement, et affectation de ces fonctions par `DEFI_FONCTION()`,
2. Recherche des colonnes de nœuds 3D correspondant aux nœuds plaques, en utilisant la librairie de manipulation de maillage interne `MAIL_PY()`,
3. Création sur ces nœuds des champs de forces nodales correspondant aux différents chargements du relèvement `AFFE_CHAR_MECA()`,

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*



**FIGURE 4.4** – Support d'application des multiplicateurs de Lagrange  $P(0)$ .

4. Création des champs aux nœuds avec `CALC_VECT_ELEM()`, et réassemblage `ASSE_VECTEUR()` pour avoir un champ défini sur les nœuds de la colonne correspondant à la numérotation totale des nœuds du maillage.
5. Utilisation d'un autre appel à `AFFE_CHAR_MECA()` avec le mot clé `LIAISON_CHAMNO` pour définir les relations linéaires portant sur les degrés de liberté définis dans le champ aux nœuds. Les coefficients à affecter à chaque degré de liberté sont déterminés par le champ de forces nodales. Il suffit ensuite d'imposer à cette relation d'être égale au degré de liberté plaque correspondant.

Cette procédure est un peu lourde car elle nécessite de créer autant de chargements que de degrés de liberté plaque sur l'interface, de plus pour chaque colonne de nœuds, on fait appel à la numérotation des nœuds du maillage pour l'assemblage de la relation linéaire, ce qui rallonge énormément la création des conditions limites. De plus si l'interface est courbe, il faut recalculer les fonctions dans la base locale pour appliquer les bonnes relations. Cependant une fois ces relations créées, il est possible de les stocker et de les réutiliser lors des calculs suivants, puisque seul le second membre change.

### 4.1.3 Raccord en déplacement

Le raccord précédent, par équivalence en travail à l'interface, comporte des risques d'instabilités et est assez lourd à mettre en œuvre notamment car il est nécessaire de prendre en compte l'orientation de l'interface. Afin de contourner ce problème on propose ici un raccord où des déplacements sont appliqués de manière forte à l'ensemble de l'interface.

#### 4.1.3.1 Définition

On a vu lors du chapitre 2 que la cinématique plaque est insuffisante et génère de trop grands effets de bord artificiels, et qu'il faut y ajouter des termes correctifs de façon à se rapprocher de la cinématique réelle 3D. Ainsi le déplacement issu du calcul plaque est corrigé par la somme des gauchissements relevés au chapitre 3, pondérée par les efforts généralisés :

$$\underline{U}^{3D}(s, z) = \underbrace{\underline{V}(s) + w(s) \cdot \underline{e}_z + z\underline{\theta}(s)}_{\text{section rigide}} + \underbrace{\sum_{k=1}^8 \underline{\mu}^k \mathbb{F}^k}_{\text{gauchissements}} \quad (4.10)$$

L'espace cinématique dans lequel est recherchée la solution est alors :

$$\mathcal{U}^2(\Omega_I) = \{\underline{U}^{3D} \in \mathcal{U}(\Omega_I), \underline{U}^{3D}(s, z) = \underline{V}(s) + w \cdot \underline{e}_z + z\underline{\theta} + \sum_{k=1}^8 \underline{\mu}^k \mathbb{F}^k \text{ sur } \Gamma_I\}$$

et le problème s'écrit : trouver  $\underline{U}^{3D} \in \mathcal{U}^2(\Omega_I)$  tel que  $\forall \underline{U}^{3D*} \in \mathcal{U}_0^2(\Omega_I)$  :

$$\int_{\Omega_I} (\underline{\varepsilon}(\underline{U}^{3D}) : \underline{\mathbb{H}} : \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{3D*})) dx = 0 \quad (4.11)$$

On note que ce raccord nécessite de connaître à la fois la cinématique et les efforts plaque pour trouver le déplacement 3D, ce qui correspond bien au caractère mixte de la théorie des plaques.

*Remarque.* Contrairement aux autres approches, l'application de condition limite en déplacement est une méthode plus « souple » vis-à-vis de la discrétisation du problème de relèvement et du problème local. En effet, une fois un déplacement de gauchissement obtenu dans la section, il est assez facile de l'appliquer sur un maillage différent (contrairement aux forces nodales qui sont liées aux modèles utilisés). Il est donc par exemple envisageable de réaliser le relèvement sur un problème plus raffiné dans l'épaisseur que dans le problème local.

Un autre point avantageux est que cette méthode ne fait pas intervenir la normale à l'interface. Les déplacements sont toujours décrits dans le repère global, ce qui simplifie la mise en œuvre et rend donc cette approche particulièrement intéressante.

#### 4.1.3.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre est assez aisée. Il suffit de combiner les relèvements de gauchissement associés à chaque effort plaque. Les étapes de la construction dans le Code\_Aster sont les suivantes :

1. Appel des fonctions de gauchissement préalablement définies par le relèvement, et affectation de ces fonctions par `DEFI_FONCTION()`,
2. Recherche des colonnes de nœuds 3D correspondant aux nœuds plaques, en utilisant la librairie de manipulation de maillage interne `MAIL_PY()`,

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

3. Création sur ces nœuds de la cinématique de section rigide de la plaque : 3 fonctions constantes et 2 fonctions linéaires avec l'opérateur `DEFI_FONCTION()` et des `FORMULE()`.
4. Assemblage des fonctions avec `CALC_FONCTION()` et combinaison des gauchissements en utilisant le coefficient approprié, par exemple :

```

fx1[i] = CALC_FONCTION(COMB=(
% Fonction constante correspondant à la translation selon x
    _F(FONCTION=VX[i],COEF=1.),
% Fonction linéaire correspondant à la rotation selon y
    _F(FONCTION=THETA_Y[i],COEF=1.),
% Fonction correspondant au mode 'NXX' pondéré par NXX
    _F(FONCTION=fNXX,COEF=NXX),
% etc.
    _F(FONCTION=fNYY,COEF=NYY),
    _F(FONCTION=fNXY,COEF=NXY),
    _F(FONCTION=fMXX,COEF=MXX),
    _F(FONCTION=fMYX,COEF=MYX),
    _F(FONCTION=fMXY,COEF=MXY),
    _F(FONCTION=fQX,COEF=QX),
    _F(FONCTION=fQY,COEF=QY),))

```

5. Une fois les 3 fonctions de déplacement assemblées pour le groupe de nœuds, `AFFE_CHAR_MECA_F()` avec l'option `DDL_IMPO` permet d'appliquer les fonctions sur les déplacements des nœuds.

Cette méthode a l'avantage d'être plus rapide à construire que la méthode par multiplicateurs de Lagrange, car la plupart des objets sont prédéfinis, et l'on n'a pas besoin de faire appel à la numérotation totale du maillage à chaque colonne de nœuds. Cependant les fonctions finales utilisées dans le calcul dépendent explicitement de la solution plaque à l'interface, on ne peut donc pas les stocker pour les réutiliser lors des calculs suivants. De plus la destruction de ces fonctions créées est une étape nécessaire dans le Code\_Aster à effectuer à la fin du calcul qui peut être assez longue.

#### 4.1.4 Résumé de ces approches

Afin de résumer les approches proposées, on établit le tableau 4.1, où pour simplifier les notations, on pose  $\underline{U}_k^P = (V_x, V_y, \theta_y, \theta_x, w)^T$ .

## 4.2 Illustration de ces approches sur un exemple simple

On considère une plaque rectangulaire en flexion de dimension  $L = a = 5$  mm,  $2h = 0.4$  mm. Cette plaque est encastree sur un bord et le déplacement transverse  $\underline{u}_d \cdot \underline{e}_z = 2h$  est imposé sur le bord opposé. Une illustration du problème est présentée figure FIG.4.5.

Type	Conditions limites à l'interface	Quantités requises	Notes
Neumann	$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sum_{k=1}^8 \mathbb{F}_k(\underline{\underline{\tau}}_k \cdot \underline{n})$	$\mathbb{F}_{k \in [1,8]}$	Nécessite des CL de Dirichlet suffisantes.
Dirichlet (faible)	$\forall k \in [1,5], \int_{-h}^h (\underline{\underline{\tau}}^k \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U}^{3D} dz = U_k^P$ effort additif $\sum_{k=6}^8 \mathbb{F}_k(\underline{\underline{\tau}}^k \cdot \underline{n})$	$\underline{U}_k^P, \mathbb{F}_{k \in [6,8]}$	Risque d'instabilités : utiliser une discrétisation P0 des $\lambda^k$ .
Dirichlet (fort)	$\underline{U}^{3D} = \underline{V} + w \cdot \underline{e}_z + z \underline{\underline{\theta}} + \sum_{k=1}^8 \underline{\mu}^k \mathbb{F}^k$	$\underline{U}_k^P, \mathbb{F}_{k \in [1,8]}$	Implémentation facile, mais requiert l'ensemble des quantités plaques.

TABLE 4.1 – Résumé des raccords proposés.

On considère soit un matériau isotrope, soit une plaque stratifiée composée de quatre plis orthotropes orientés  $(-45/45)_s$  dont les propriétés sont identiques à celles présentées dans le tableau 3.2.

Pour évaluer la qualité des raccords, on se limite à une unique étape de descente : après un calcul plaque préparatoire, les différentes conditions limites sont appliquées sur la zone d'intérêt 3D. La solution de référence correspond à un calcul purement 3D. Puisque la zone locale est encastree, il est possible d'utiliser les trois raccords définis précédemment.

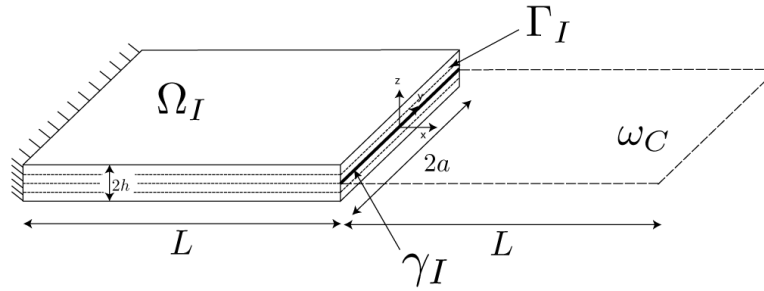


FIGURE 4.5 – Géométrie simplifiée pour l'étape de descente.

Comme ici aucune non-linéarité ou détail géométrique n'est ajouté dans le modèle 3D, les différences entre le modèle de référence et le modèle simplifié sont minimales et essentiellement dues à la prise en compte de l'encastrement.

Le maillage de la zone d'intérêt 3D utilise des éléments hexaèdres à 20 nœuds (HEXA20), et possède 16 éléments dans l'épaisseur (direction  $\underline{e}_z$ ) et 20 éléments dans le plan (directions  $\underline{e}_x$  et  $\underline{e}_y$ ). La solution de référence est construite avec les mêmes éléments maillant l'ensemble de la structure.

La solution globale plaque a été obtenue en considérant un maillage de 40 éléments dans le plan, avec un modèle prenant en compte le cisaillement transverse, les coefficients



de correction du cisaillement sont choisis d'après l'homogénéisation de Dhatt et Batoz [Batoz et Dhatt, 1990].

La lecture de la solution plaque et la création des conditions limites au raccord sont réalisées par un script python interfacé avec le Code\_Aster.

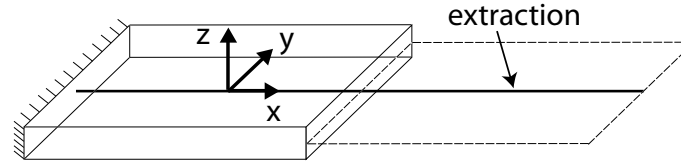


FIGURE 4.6 – Extraction selon l'axe x.

Afin de comparer les effets des différents raccords, on observe l'évolution des contraintes planes et hors planes le long d'une ligne de direction  $e_x$  FIG. 4.6 (pour observer la pénétration des perturbations) ainsi que leur profil dans l'épaisseur au centre du raccord.

Les figures FIG. 4.7 correspondent à un cas isotrope. De façon générale, elles montrent une bonne concordance entre les différentes méthodes qui donnent toutes des résultats très proches de la référence. Les erreurs de la reconstruction sont de l'ordre de grandeur prévu par la théorie, en  $O(\sigma_{xx} \frac{h}{L})$  pour la contrainte de cisaillement, et en  $O(\sigma_{xx} \frac{h^2}{L^2})$  pour la contrainte transverse.

On peut remarquer que, bien que faibles, les contraintes transverses ne sont pas nulles, notamment sur les faces supérieures et inférieures. En effet même si les forces nodales s'annulent sur les bords, le calcul éléments finis ne garantit pas la vérification de la condition limite par le champ de contrainte.

Dans le cas d'une plaque stratifiée avec 4 plis orthotropes, dont les caractéristiques sont rappelés dans le tableau 3.2, on obtient les figures FIG. 4.8a, 4.8c, 4.8e (évolution des contraintes selon  $e_x$ ) et les FIG. 4.8b, 4.8d, 4.8f (profil des contraintes dans l'épaisseur).

Contrairement au cas isotrope, les résultats FIG. 4.8 sont plus partagés. Les contraintes normales dans le plan  $\sigma_{xx}$  sont assez bien représentées. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et la contrainte transverse  $\sigma_{zz}$  sont grossièrement de l'ordre de grandeur attendu, pour les trois raccords. Cependant, des différences plus importantes sont observées sur les contraintes  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$ , et notamment dans le cas du raccord en déplacement faible. Dans le chapitre 5 on verra que la mise en place d'une zone tampon permet d'absorber cet effet parasite.

Ce phénomène peut trouver son origine dans les insuffisances du modèle de Reissner-Mindlin utilisé ici pour représenter la plaque. Dans le cas des plaques stratifiées [Lebée et Sab, 2011] montrent qu'il n'est plus possible en général de trouver un effort de cisaillement qui équilibre directement la variation des moments<sup>2</sup>. La solution qu'ils proposent, un modèle de second gradient ("Bending-Gradient") dans lequel les efforts transverses sont

2. Les travaux de Whitney sur les facteurs de corrections de cisaillement utilisent une flexion cylindrique qui simplifie les expressions.

remplacés par les gradients des moments, n'est pas applicable dans le cadre non-intrusif choisi. On note cependant que dans le cas où l'on applique un raccord à déplacement imposé (avec gauchissement), cet effet est nettement diminué, et l'on a relativement une bonne allure des contraintes à l'interface.

Dans la suite, on utilisera le raccord par gauchissement pour les trois raisons suivantes :

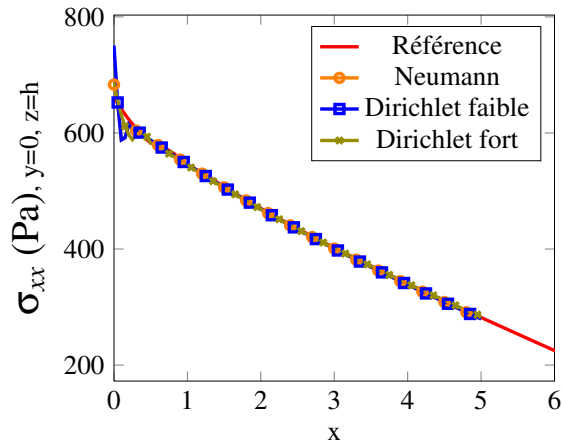
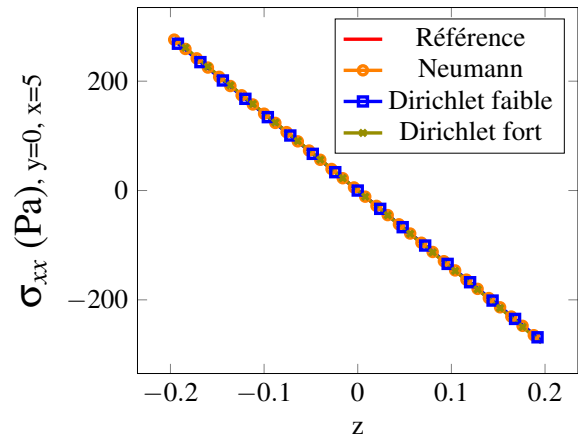
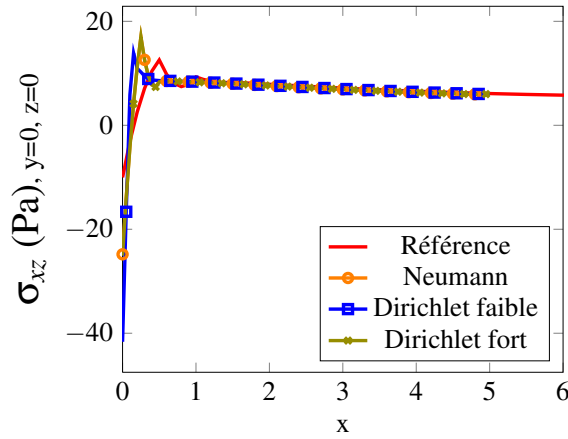
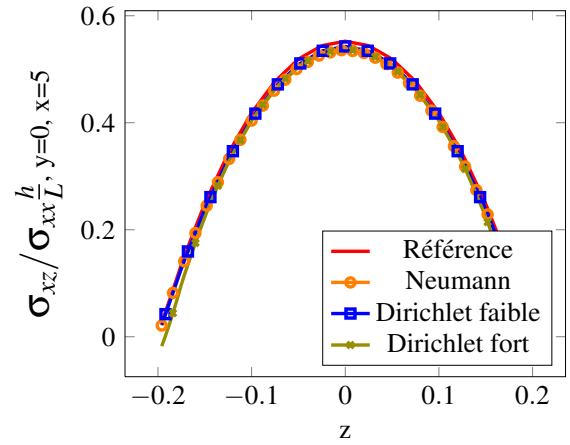
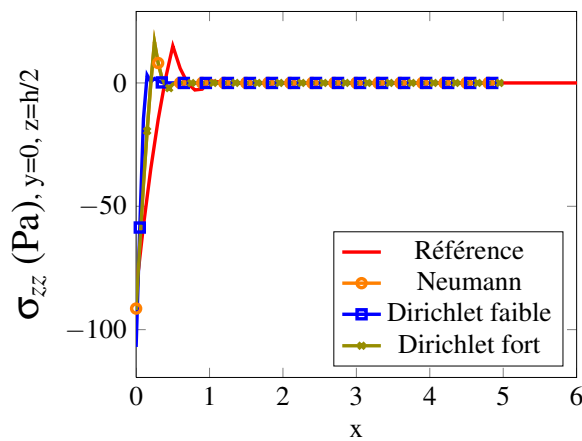
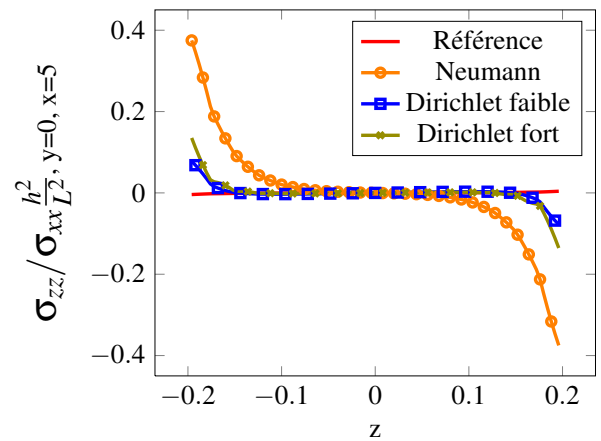
1. de bons résultats sur des plaques homogènes ou stratifiées, tout en restant dans un cadre théorique classique,
2. pas de mouvement de corps rigide à bloquer, ou de base locale à gérer,
3. simple à mettre en œuvre.

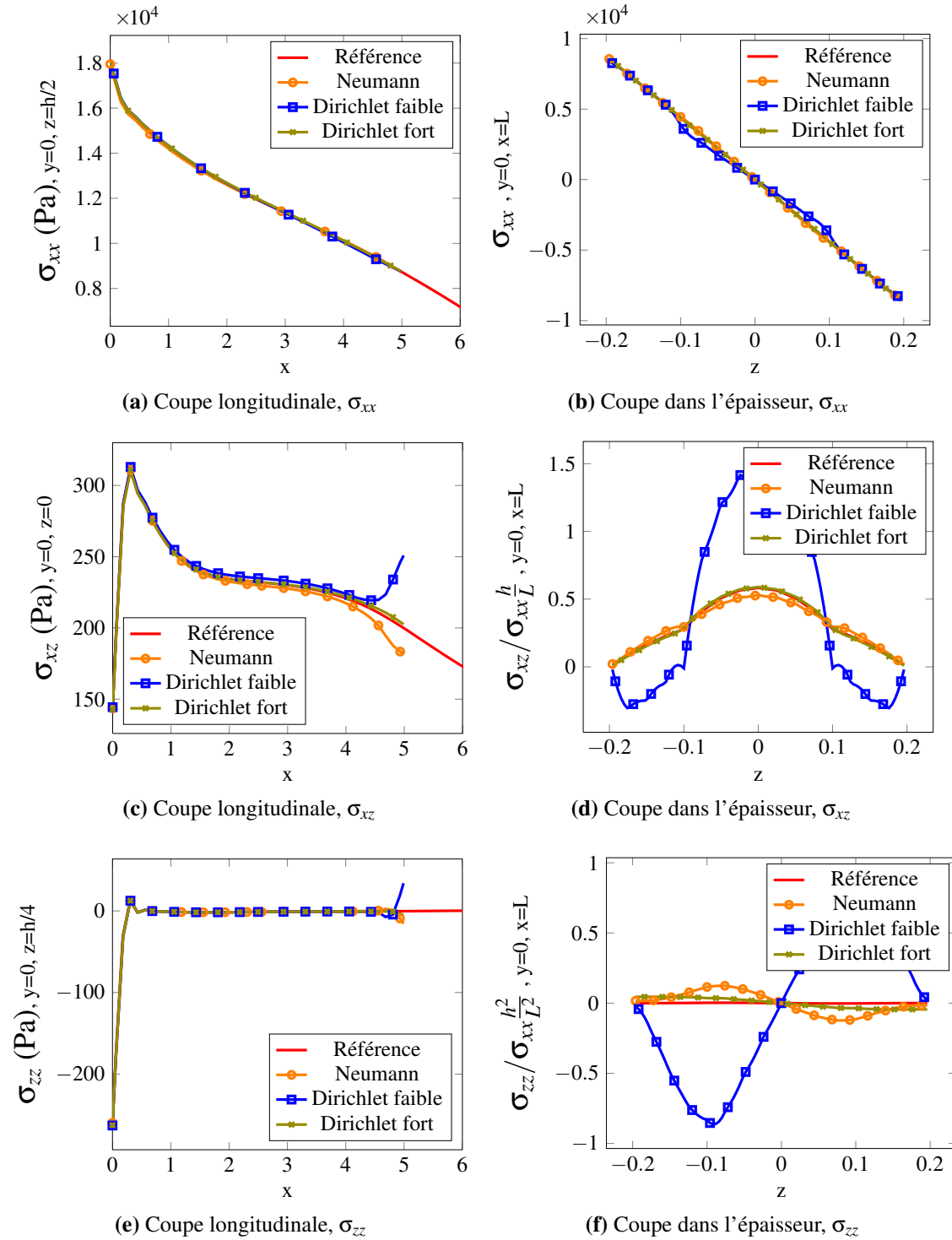
### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé trois approches pour le raccord entre le modèle plaque et le domaine 3D. Ces approches sont toutes applicables dans un cadre non-intrusif. Elles utilisent des conditions limites déjà présentes dans les codes éléments finis, et sont toutes basées sur les relèvements numériques définis dans le chapitre précédent.

On a pu constater que si ces trois approches étaient équivalentes pour un cas isotrope, ce n'est pas le cas pour une plaque stratifiée. Bien que globalement restant dans un ordre de grandeur acceptable, les erreurs à l'interface dues aux effets de bord artificiels sont inévitables sans une théorie plus évoluée que la théorie de Reissner-Mindlin utilisée ici. On verra que ces perturbations très localisées pourront être atténuées dans la stratégie de couplage non-intrusif à l'aide d'une "zone tampon".

Aussi dans la suite, même si tout ces raccords pourraient être utilisés dans le cadre itératif global-local on choisit le raccord en déplacement imposé (Dirichlet fort), car il évite les problèmes d'instabilités de multiplicateurs de Lagrange, semble donner des résultats de qualité, et de plus il est assez facile à mettre en œuvre, une fois les fonctions de gauchissement calculées.

(a) Coupe longitudinale,  $\sigma_{xx}$ (b) Coupe dans l'épaisseur,  $\sigma_{xx}$ (c) Coupe longitudinale,  $\sigma_{xz}$ (d) Coupe dans l'épaisseur,  $\sigma_{xz}$ (e) Coupe longitudinale,  $\sigma_{zz}$ (f) Coupe dans l'épaisseur,  $\sigma_{zz}$ **FIGURE 4.7** – Évolution des contraintes pour une plaque isotrope.



**FIGURE 4.8** – Évolution des contraintes pour une plaque stratifiée.



# Chapitre 5

## Mise en oeuvre de la stratégie itérative Globale/Locale non-intrusive

*Des réinterprétations de la stratégie de couplage non-intrusive sont proposées, ainsi que des variantes et améliorations. La méthode est ensuite appliquée au couplage plaque/3D de manière à converger vers un modèle hybride. Une première illustration est présentée.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Mise en place de la stratégie</b>	<b>104</b>
5.1.1	Reformulation de la méthode	104
5.1.2	Accélération par solveur de Krylov	108
5.1.3	Une méthode de Schwarz optimisée	110
<b>5.2</b>	<b>Application au raccord plaque/3D</b>	<b>111</b>
5.2.1	Adaptation des étapes du couplage	111
5.2.2	Introduction d'une « zone tampon »	114
5.2.3	Mise en œuvre de la méthode	115
<b>5.3</b>	<b>Exemple sur un cas de plaque trouée stratifiée</b>	<b>116</b>
5.3.1	Convergence vers le modèle hybride	117
5.3.2	Validation du modèle hybride	117
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>

---

Le but de la méthode développée ici est, d'un point de vue plus industriel, de compléter une approche de *submodelling* classique, par une correction provenant d'un retour d'information à l'échelle du modèle global. Ainsi par des itérations, on converge vers un modèle « hybride » sur les domaines plaque  $\omega_C$  et 3D  $\Omega_I$ . On utilise ici les mêmes notations et formulations que définies dans la section 1.2.3.4.

Dans un premier temps, on propose des réinterprétations de la méthode en terme solveur itératif appliqué à un problème dont l'inconnue est une discontinuité d'effort, et en terme de méthode de décomposition de domaine de Schwarz optimisée. Ces nouveaux formalismes permettent d'accélérer la méthode par l'utilisation d'un solveur Krylov, et de justifier l'emploi d'un léger recouvrement appelé « zone tampon ». Dans une deuxième partie, on s'intéresse plus spécifiquement aux propriétés des opérateurs de couplage plaque/3D et à l'intérêt d'utiliser la « zone tampon ». La dernière partie présente un exemple simple d'application.

## 5.1 Mise en place de la stratégie

### 5.1.1 Reformulation de la méthode

Afin de mettre en place la stratégie que l'on va utiliser par la suite, on reformule ici la stratégie non-intrusive dans un formalisme un peu différent de celui proposé par L. Gendre.

On rappelle que le domaine  $\Omega$  est partitionné en une zone d'intérêt  $\Omega_I$  et une zone complémentaire  $\Omega_C$  séparées par l'interface  $\Gamma$ . Sur la zone d'intérêt coexistent une représentation fine  $\bullet^F$  et une représentation grossière  $\bullet^G$ , la zone complémentaire n'a qu'une représentation grossière et la représentation fine est nécessairement sur la zone d'intérêt.

Dans un premier temps, on étudie ce couplage d'un point de vue continu de manière à donner une interprétation importante de la méthode. Afin de conserver des notations les plus légères possibles, on écrit le problème mécanique sous une forme variationnelle classique en déplacement. Soit  $\mathcal{U}(\Omega)$  l'espace des déplacements cinématiquement admissibles sur  $\Omega$ , on a  $u \in \mathcal{U}(\Omega) \Leftrightarrow \{u|_{\Omega_I} \in \mathcal{U}(\Omega_I), u|_{\Omega_C} \in \mathcal{U}(\Omega_C), u \text{ continu à travers } \Gamma\}$ . On note l'espace vectoriel associé  $\mathcal{U}^0(\Omega)$ . On introduit la forme bilinéaire  $a^{hyb}$  et forme linéaire  $l^{hyb}$  dont on peut exhiber les contributions de la zone d'intérêt (fine) et de la zone complémentaire. On cherche donc :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{U}(\Omega), \forall v \in \mathcal{U}^0(\Omega) \\ a^{hyb}(u, v) &:= a^F(u, v) + a^C(u, v) = l(v) := l^F(v) + l^C(v) \end{aligned} \quad (5.1)$$

On introduit la représentation grossière de la zone d'intérêt (exposant  $\bullet^{G,I}$ ) :

$$\begin{aligned} a^F(u, v) + a^C(u, v) + (a^{G,I}(u, v) - a^{G,I}(u, v)) &= l^F(v) + l^C(v) + (l^{G,I}(v) - l^{G,I}(v)) \\ a^C(u, v) + a^{G,I}(u, v) &= (l^{G,I}(v) + l^C(v)) + (l^F(v) - a^F(u, v)) - (l^{G,I}(v) - a^{G,I}(u, v)) \\ a^G(u, v) &= l^G(v) + (l^F(v) - a^F(u, v)) - (l^{G,I}(v) - a^{G,I}(u, v)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

où l'exposant  $\bullet^G$  (grossier, global), correspond à l'addition du modèle grossier de la zone d'intérêt et du modèle de la zone complémentaire. Afin d'autoriser une modélisation grossière de la zone d'intérêt (par exemple appuyée sur une géométrie simplifiée de la zone d'intérêt), on introduit un espace cinématique grossier global  $\mathcal{U}_G(\Omega)$ .

On en déduit le schéma itératif, de type Gauss-Seidel (ou point-fixe), suivant :

$$\begin{cases} u_n^G \in \mathcal{U}_G(\Omega), \forall v^G \in \mathcal{U}_G^0(\Omega) \\ a^G(u_n^G, v^G) = l^G(v^G) + (l^F(v^G) - a^F(u_{n-1}^G, v^G)) - (l^{G,I}(v^G) - a^{G,I}(u_{n-1}^G, v^G)) \\ \begin{cases} u_n^F \in \mathcal{U}(\Omega_I), \lambda_n^F \in \mathcal{U}(\Gamma)^*, \forall v^F \in \mathcal{U}^0(\Omega_I), \forall \mu^F \in \mathcal{U}(\Gamma)^* \\ a^F(u_n^F, v^F) = l^F(v^F) + \langle \lambda_n^F, v^F \rangle \\ \langle \mu^F, u_n^F - u_n^G \rangle = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.3)$$

La notation (abusive)  $\mathcal{U}(\Gamma)$  représente l'espace des traces de déplacement sur l'interface (commun aux modélisations grossière ou fine des zones d'intérêt et complémentaire).  $\mathcal{U}(\Gamma)^*$  est donc l'espace dual et  $\langle \mu, u \rangle$  le crochet de dualité. Le multiplicateur  $\lambda_n^F$  qui contraint la continuité du déplacement  $u_n^{hyb} = (u_n^G|_{\Omega_C}, u_n^F)$  s'interprète comme la réaction de la zone d'intérêt au déplacement imposé  $u_n^G$  sur l'interface.

Par ailleurs, l'équilibre dans la zone d'intérêt implique que l'on peut définir un champ d'effort d'interface satisfaisant la relation suivante :

$$\begin{cases} \lambda_n^{G,I} \in \mathcal{U}(\Gamma)^*, \forall v^G \in \mathcal{U}_G^0(\Omega_I) \\ \langle \lambda_n^{G,I}, v^G \rangle := -l^{G,I}(v^G) + a^{G,I}(u_n^G, v^G) \end{cases} \quad (5.4)$$

On en déduit que l'étape globale de la méthode de Gauss-Seidel peut se réécrire :

$$a^G(u_{n+1}^G, v^G) = l^G(v^G) - \langle \lambda_n^F - \lambda_n^{G,I}, v^G \rangle \quad (5.5)$$

Autrement dit, le calcul global construit un champ de contrainte discontinu à l'interface dont le saut vaut :

$$\delta_{n+1} := \lambda_n^F - \lambda_n^{G,I} \quad (5.6)$$

En introduisant la valeur de la contrainte sur le côté complémentaire :

$$\langle \lambda_n^C, v^G \rangle := -l^C(v^G) + a^C(u_n^G, v^G) = -\langle \lambda_n^{G,I} + \delta_n, v^G \rangle \quad (5.7)$$



On peut se servir de ce champ pour réinterpréter les itérations :

$$a^G(u_{n+1}^G, v^G) = l^G(v^G) - \langle \lambda_n^F + \lambda_n^C, v^G \rangle + \langle \delta_n, v^G \rangle \quad (5.8)$$

La méthode peut donc s'expliquer comme la recherche itérative de la discontinuité  $\delta_n$  de contrainte à l'interface dans le modèle grossier, de manière à annuler le déséquilibre  $\lambda_n^F + \lambda_n^C$  entre le modèle fin et le modèle complémentaire, et cela en n'utilisant que des calculs locaux fins et globaux grossiers.

Afin de simplifier l'analyse, on se place maintenant dans le cadre discret (éléments finis, avec les notations classiques pour les matrices de raideurs, vecteurs d'effort et de déplacement). On autorise deux maillages différents dans la zone d'intérêt mais on suppose qu'à l'interface la cinématique grossière est incluse dans la cinématique fine, on note  $\mathbf{J}$  l'opérateur d'interpolation fin vers grossier.

On reprend le schéma itératif non-intrusif avec  $\delta_n$  l'inconnue :

**Initialisation** :  $\delta_0 = 0$ ,

**Résolution globale** : on résout le problème grossier sur l'ensemble de la structure en autorisant un chargement en effort additionnel sur l'interface  $\delta_n$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{CC} & \mathbf{K}_{C\Gamma} \\ \mathbf{K}_{\Gamma C} & (\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^C + \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{GI}) \\ & \mathbf{K}_{I\Gamma}^G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{C_n} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_n}^G \\ \mathbf{u}_{I_n}^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_C \\ \mathbf{F}_{\Gamma}^{GI} + \mathbf{F}_{\Gamma}^C + \delta_n \\ \mathbf{F}_I^G \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

*Remarque.* Les réactions de la zone d'intérêt  $(\mathbf{F}_I^G, \mathbf{F}_{\Gamma}^{GI})$  peuvent être considérées comme « paramètres » car elles n'influencent pas sur le résultat mais seulement sur la convergence, voir équation (5.16).

**Post-traitement de la réaction  $\lambda^C$**  : ce calcul peut se faire par intégration de la contrainte sur  $\Gamma$  à partir des éléments de la zone complémentaire ou de la zone d'intérêt. Une autre technique de calcul, un peu plus lourde, utilisée dans [Gendre, 2009], fait appel à une représentation explicite de la zone d'intérêt grossière ou de la zone complémentaire :

$$\lambda_n^C = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^C \mathbf{u}_{\Gamma_n}^G + \mathbf{K}_{\Gamma C} \mathbf{u}_{C_n} - \mathbf{F}_{\Gamma}^{GC} = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{GI} \mathbf{u}_{\Gamma_n}^G + \mathbf{K}_{\Gamma I}^G \mathbf{u}_{I_n}^G - \mathbf{F}_{\Gamma}^{GI} - \delta_n \quad (5.10)$$

**Calcul local du déplacement et de la réaction** : on résout le problème fin sur la zone d'intérêt à déplacement  $\mathbf{u}_{\Gamma_n}^L$  imposé, on en déduit la réaction  $\lambda_n^L$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\Gamma_n}^F &= \mathbf{J} \mathbf{u}_{\Gamma_n}^G \\ \mathbf{u}_{I_n}^F &= \mathbf{K}_{II}^{F-1} (\mathbf{F}_I^F - \mathbf{K}_{I\Gamma}^F \mathbf{u}_{\Gamma_n}^F) \\ \lambda_n^L &= \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^F \mathbf{u}_{\Gamma_n}^F + \mathbf{K}_{\Gamma I}^F \mathbf{u}_{I_n}^F - \mathbf{F}_{\Gamma}^F \end{aligned} \quad (5.11)$$

**Évaluation du résidu** :  $\mathbf{r}_n = \mathbf{J}^t \lambda_n^F + \lambda_n^C$

**Mise à jour de l'effort d'interface** :  $\delta_{n+1} = \delta_n - \mathbf{r}_n$

Étant donné que les champs de déplacements sont obtenus par résolution d'équation d'équilibre, la seule équation qui ne soit pas vérifiée au cours des itérations est l'équilibre des efforts d'interface. Il est alors intéressant, d'un point de vue formel pour l'analyse de la méthode, de condenser les équations aux interfaces et d'introduire le complément de Schur des sous-domaines, et les seconds membres condensés associés :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^C &= \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^C - \mathbf{K}_{\Gamma C} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{K}_{C\Gamma} \\ \mathbf{b}^C &= \mathbf{F}_{\Gamma}^C - \mathbf{K}_{\Gamma C} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{F}_C\end{aligned}\quad (5.12)$$

On notera  $\mathbf{S}^G = \mathbf{S}^C + \mathbf{S}^{G,I}$  le complément de Schur global grossier et  $\mathbf{S}^{hyb} = \mathbf{S}^C + \mathbf{J}^T \mathbf{S}^F \mathbf{J}$  le complément de Schur global hybride (de même pour les seconds membres condensés).

L'algorithme non-intrusif devient alors  $\delta_0 = 0$  et pour  $n > 0$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\Gamma_n} &= (\mathbf{S}^G)^{-1} (\mathbf{b}^G + \delta_{n-1}) \\ \lambda_n^C &= \mathbf{S}^C \mathbf{u}_{\Gamma} - \mathbf{b}^C \\ \lambda_n^F &= \mathbf{S}^L \mathbf{J} \mathbf{u}_{\Gamma} - \mathbf{b}^F \\ \mathbf{r}_n &= \lambda_n^C + \mathbf{J}^T \lambda_n^F \\ \delta_n &= \delta_{n-1} - \mathbf{r}_n\end{aligned}\quad (5.13)$$

La matrice d'itération qui pilote la convergence de l'algorithme prend alors la forme :

$$\delta_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}}) \delta_n - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{b}^G + \mathbf{b}^{hyb}\quad (5.14)$$

On en déduit aussi l'expression du système dont  $\delta$  est solution :

$$\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}} \delta = \mathbf{b}^{hyb} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{b}^G\quad (5.15)$$

Ce qui permet de donner l'évolution de l'erreur  $\mathbf{e}_n = \delta_n - \delta$  au cours des itérations :

$$\mathbf{e}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}}) \mathbf{e}_n = (\mathbf{S}^{GI} - \mathbf{J}^T \mathbf{S}^F \mathbf{J}) \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{e}_n\quad (5.16)$$

La convergence est assurée si le rayon spectral de la matrice d'itération est plus petit que 1. Les compléments de Schur étant des matrices symétriques définies positives, on en déduit la convergence de la méthode sous réserve que la représentation grossière de la zone d'intérêt soit plus raide que la représentation fine  $\mathbf{S}^{G,I} \geq \mathbf{J}^T \mathbf{S}^F \mathbf{J}$ .

Dans le cas où cette inégalité ne serait pas vérifiée, il est possible d'utiliser une relaxation : on modifie l'étape de mise à jour par un coefficient  $\omega$

$$\delta_n = \delta_{n-1} - \omega \mathbf{r}_n\quad (5.17)$$

ce qui conduit à la matrice  $(\mathbf{I} - \omega \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G^{-1}})$  dont on peut être sûr que le rayon spectral est inférieur à 1 pour  $\omega$  choisi suffisamment petit.

Il est à noter que l'algorithme précédent et l'analyse qui en a été faite, en prenant quelques précautions<sup>1</sup>, restent valables pour des calculs non-linéaires. Cependant dans le cas linéaire, une optimisation est possible en remplaçant le solveur de Gauss-Seidel (point fixe) par un solveur type gradient conjugué.

1. On suppose notamment que les matrices restent toujours définies positives.

### 5.1.2 Accélération par solveur de Krylov

Dans sa thèse L.Gendre a proposé une interprétation de la méthode (appliquée à un problème non-linéaire) en terme de Newton modifié, et il en a accéléré la convergence via une technique de quasi-Newton SR1 (correction de rang 1 de la matrice globale), la formule de Sherman-Morrison permettant de garantir l'aspect non-intrusif.

On propose ici d'utiliser la reformulation précédente dans le cas linéaire pour montrer qu'il est possible d'utiliser un solveur du type gradient conjugué pour trouver l'effort correctif  $\delta$ .

On a vu que  $\delta$  est solution du problème suivant :

$$\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \delta = \mathbf{b}^{hyb} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}^G \quad (5.18)$$

ce système peut d'ailleurs être obtenu à partir du problème hybride en initialisant par un calcul grossier  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}^G$  et en cherchant le reste sous la forme  $\mathbf{S}^{G-1} \delta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{u} &= \mathbf{b}^{hyb} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{S}^{G-1} (\delta + \mathbf{b}^G) \\ \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \delta &= \mathbf{b}^{hyb} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}^G \end{aligned} \quad (5.19)$$

autrement dit, le système en  $\delta$  correspond à la résolution du problème hybride avec un préconditionneur à droite  $\mathbf{S}^{G-1}$  et une initialisation choisie de manière à rendre le calcul non-intrusif.

En effet, la propriété fondamentale que l'on va exploiter ici est que même si l'opérateur  $\mathbf{S}^{hyb}$  n'est jamais créé, les membres de droite sont tels que le calcul du produit  $\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1}$  est toujours réalisable de manière non-intrusive. A titre illustratif, on détaille le calcul du second membre :

$$\begin{aligned} \text{soit } \mathbf{u}_\Gamma &= \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}^G \\ \mathbf{b}^{hyb} - \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}^G &= \mathbf{J}^T (\mathbf{b}^F - \mathbf{S}^F \mathbf{J} \mathbf{u}_\Gamma) + (\mathbf{b}^C - \mathbf{S}^C \mathbf{u}_\Gamma) \\ &= -(\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}^F + \boldsymbol{\lambda}^C) = -\mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

La première ligne correspond à un calcul global dont on extrait le déplacement à l'interface. La seconde ligne correspond au post-traitement de la réaction dans la zone grossière et au calcul de la réaction fine dans la zone d'intérêt. La dernière ligne correspond au calcul du déséquilibre résultant à l'interface. *In fine* le second membre du système est exactement le premier résidu de la technique de calcul usuelle.

Une propriété fondamentale de l'opérateur préconditionné est qu'il est auto-adjoint pour le produit scalaire induit par  $\mathbf{S}^{G-1}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)_{\mathbf{S}^{G-1}} &= (\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}_1)^T \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}_2 \\ &= \mathbf{b}_1^T \mathbf{S}^{G-1} (\mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}_2) \\ &= (\mathbf{b}_1, \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{b}_2)_{\mathbf{S}^{G-1}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Il est donc possible de mettre en place un algorithme de gradient conjugué préconditionné [Saad, 2003].

Le fait que le préconditionnement a lieu à droite est non-standard, l'algorithme ci-dessous donne les adaptations requises. Il est en particulier nécessaire de stocker un vecteur de plus, correspondant à une direction de recherche non-préconditionnée  $\mathbf{p}$ .

Initialisation avec un calcul global :  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{S}^{G^{-1}}(\mathbf{b}^G)$   
 $\lambda_0^C = \mathbf{b}^C - \mathbf{S}^C \mathbf{u}_0$ , par post-traitement  
 Résolution locale, à déplacement imposé :  $\lambda_0^L = \mathbf{S}^L \mathbf{J} \mathbf{u}_0 - \mathbf{b}^L$   
 Évaluation du résidu :  $\mathbf{r}_0 = -(\mathbf{J}^T \lambda^L + \lambda^C)$   
 Calcul de correction du déplacement à l'interface :  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{S}^{G^{-1}}(\mathbf{b}^G + \mathbf{r}_0)$   
 Initialisation du gradient conjugué  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$   
**Pour**  $j \in [1, \dots, m]$  **faire**  
      $\mathbf{w}_{j-1} = \mathbf{S}^{hyb} \mathbf{q}_{j-1}$   
      $\alpha_j = \mathbf{r}_{j-1}^T \mathbf{z}_{j-1} / \mathbf{w}_{j-1}^T \mathbf{q}_{j-1}$  Optimisation du pas  
      $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{w}_{j-1}$  Mise à jour du résidu  
      $\delta_j = \delta_{j-1} + \alpha_j \mathbf{p}_{j-1}$  Mise à jour du chargement  
      $\mathbf{z}_j = \mathbf{S}^{G^{-1}}(\mathbf{b}^G + \mathbf{r}_j)$  Préconditionnement  
      $\beta_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{w}_j) / (\mathbf{r}_{j-1}, \mathbf{w}_{j-1})$   
      $\mathbf{p}_j = \mathbf{r}_j + \beta_j \mathbf{p}_{j-1}$  Orthogonalisation de la ddr non-préconditionnée  
      $\mathbf{q}_j = \mathbf{z}_j + \beta_j \mathbf{q}_{j-1}$  Orthogonalisation de la ddr classique  
**Fin Pour**

Dans cet algorithme, la boucle interne au gradient conjugué ne nécessite qu'un appel au solveur local et un appel au solveur global (comme dans la méthode de point fixe). En effet lors du calcul de  $\mathbf{w}_{j-1}$ ,  $\mathbf{S}^{G,C} \mathbf{q}_{j-1}$  est déjà calculé lors du post-traitement de  $\mathbf{z}_j = \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{r}_j$ , on n'a donc que  $\mathbf{S}^L \mathbf{q}_{j-1}$  à évaluer. Les opérations restantes ne sont que des produits scalaires sur les quantités d'interface.

*Remarque.* Dans cet algorithme le résidu n'est pas évalué directement, mais par correction successive :

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{w}_{j-1} \quad (5.22)$$

Il est possible que, numériquement, une perte de précision sur le résidu se produise. Dans ce cas, l'algorithme doit être redémarré depuis la dernière solution en cours.

Par rapport à l'algorithme de point-fixe, on note les propriétés suivantes :

- absence de restriction sur la convergence, le modèle hybride peut être plus rigide que le modèle global,
- convergence optimale,
- léger accroissement des besoins de stockage en mémoire,

- non-applicabilité au cas non-linéaire, sauf adaptations à la convergence non-garantie [Fletcher et Reeves, 1964, Daniel, 1967] ; dans ce cas les algorithmes SR1 et BFGS sont plus sûrs.

### 5.1.3 Une méthode de Schwarz optimisée

Dans cette sous-section, on montre comment la méthode de couplage non-intrusive rentre dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine de Schwarz sans recouvrement (optimisées). Cette interprétation permet de réutiliser les nombreuses propriétés de ces méthodes [Widlund et Toselli, 2005], comme l'accélération Krylov développée indépendamment et exposée dans la sous-section précédente, elle permet aussi d'asseoir théoriquement les techniques avec recouvrement (zone tampon) qui seront utilisées par la suite.

Avec les notations précédentes, le problème hybride condensé peut s'écrire sous forme sous-structurée (pour simplifier on a supposé les discrétisations conformes à l'interface) :

$$\begin{cases} \mathbf{S}^C \mathbf{u}_\Gamma^C = \mathbf{b}^C + \boldsymbol{\lambda}^C \\ \mathbf{S}^F \mathbf{u}_\Gamma^F = \mathbf{b}^F + \boldsymbol{\lambda}^F \\ \mathbf{u}_\Gamma^C - \mathbf{u}_\Gamma^F = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}^C + \boldsymbol{\lambda}^F = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Une méthode de Schwarz optimisée appliquée à ce système consisterait à réécrire les conditions d'interface en faisant intervenir des matrices de rigidité  $\mathbb{A}^C$  et  $\mathbb{A}^F$  paramètres de la méthode :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\lambda}^C + \boldsymbol{\lambda}^F) - \mathbb{A}^F (\mathbf{u}_\Gamma^G - \mathbf{u}_\Gamma^F) = 0 \\ (\boldsymbol{\lambda}^C + \boldsymbol{\lambda}^F) + \mathbb{A}^C (\mathbf{u}_\Gamma^G - \mathbf{u}_\Gamma^F) = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

Pour que ces conditions soient équivalentes aux originales il suffit que  $(\mathbb{A}^C + \mathbb{A}^F)$  soit inversible. En pratique les matrices sont choisies symétriques définies positives, ce qui permet de vérifier automatiquement cette condition.

En injectant (5.24) dans (5.23) on obtient (en omettant l'indice  $\Gamma$  du déplacement pour simplifier l'écriture) :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}^F + \mathbb{A}^F) \mathbf{u}^F = \mathbf{b}^F - \boldsymbol{\lambda}^C + \mathbb{A}^F \mathbf{u}^G \\ (\mathbf{S}^C + \mathbb{A}^C) \mathbf{u}^G = \mathbf{b}^C - \boldsymbol{\lambda}^F + \mathbb{A}^C \mathbf{u}^F \end{cases} \quad (5.25)$$

La méthode de Schwarz classique consiste à résoudre ce problème par un point fixe, pour  $(i > 0)$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}^C + \mathbb{A}^C) \mathbf{u}_i^G = \mathbf{b}^C - \boldsymbol{\lambda}_{i-1}^F + \mathbb{A}^C \mathbf{u}_{i-1}^F \\ \boldsymbol{\lambda}_i^C = \mathbf{S}^C \mathbf{u}_i^G - \mathbf{b}^C \\ (\mathbf{S}^F + \mathbb{A}^F) \mathbf{u}_i^F = \mathbf{b}^F - \boldsymbol{\lambda}_i^C + \mathbb{A}^F \mathbf{u}_i^G \\ \boldsymbol{\lambda}_i^F = \mathbf{S}^F \mathbf{u}_i^F - \mathbf{b}^F \end{cases} \quad (5.26)$$

On voit que les itérations de la méthode non-intrusive correspondent au choix :  $\mathbb{A}^F = \infty$ ,  $\mathbb{A}^C = \mathbf{S}^{GI}$  et  $-\lambda_0^F + \mathbb{A}^C \mathbf{u}_0^F = \mathbf{b}^{GI}$ .

On retrouve aussi le résultat classique du choix optimal  $\mathbb{A}^C = \mathbf{S}^F$  et  $\mathbb{A}^F = \mathbf{S}^C$ . On voit que l'approche non-intrusive propose une construction pratique de  $\mathbb{A}^C$  en utilisant une représentation grossière de la zone d'intérêt. Le choix  $\mathbb{A}^F = \infty$  est quant-à lui un peu simpliste, les techniques mixtes proposées dans [Gendre, 2009] correspondent à des améliorations de ce raccord.

En établissant ainsi un lien entre algorithme non-intrusif itératif et méthode de Schwarz optimisée, on hérite des propriétés de convergence bien établies des méthodes de Schwarz [Widlund et Toselli, 2005], y compris en non-linéaire [Badea, 1991]. On bénéficie ainsi d'un cadre clair pour justifier l'approche avec « zone tampon » qui sera décrite dans la section 5.2.2.

## 5.2 Application au raccord plaque/3D

La particularité du raccord proposé ici est d'étendre la stratégie exposée dans les sections précédentes au cas de couplage plaque/3D en utilisant les raccords vus dans le chapitre 4.

Dans un premier temps, on écrit dans le formalisme de la section précédente les raccords du chapitre 4. On montre ensuite qu'il est particulièrement intéressant pour nos applications d'utiliser une technique « à deux interfaces » qui correspond à une méthode de Schwarz optimisée avec recouvrement.

En réutilisant les notations précédentes, on considère que la solution dans le domaine  $\Omega_C$  est suffisamment régulière pour que l'on puisse l'approcher par un modèle plaque dont le domaine est noté  $\omega_C$  avec  $\Omega_C = \omega_C \times [-h, h]$ .

On définit aussi  $\Gamma_I = \gamma_I \times [-h, h]$  les interfaces entre les deux sous-domaines. On conserve la notation  $\mathbf{u}$  pour les vecteurs éléments finis de déplacement et  $\lambda$  pour les réactions nodales, sur la modélisation fine (exposant  $F$ ) cela correspondra à des degrés de liberté 3D, pour la modélisation grossière (exposant  $\bullet^{G,I}$  et  $\bullet^C$ ) à des degrés de liberté plaque. Sur l'interface  $\gamma$ , on distinguera les efforts plaque associés à une coupe normale à l'interface  $\lambda$  (5 composantes) et l'ensemble des efforts généralisés  $\tilde{\lambda}$  (8 composantes), on notera  $\hat{\lambda}$  les 3 composantes telles que  $\tilde{\lambda} = [\lambda, \hat{\lambda}]$ .

### 5.2.1 Adaptation des étapes du couplage

On reprend ici brièvement les étapes de la méthode de couplage, pour les différents raccords proposés au chapitre 4, dans le formalisme qui vient d'être introduit.

Afin de simplifier les notations et ne pas avoir à introduire de changement de base, on suppose l'interface droite, de normale  $\underline{x}$ . De même pour fixer les idées, on suppose que chaque nœud plaque de l'interface est en vis-à-vis d'une colonne de nœuds 3D (maillage conforme). On utilise les opérateurs de transfert suivants :

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

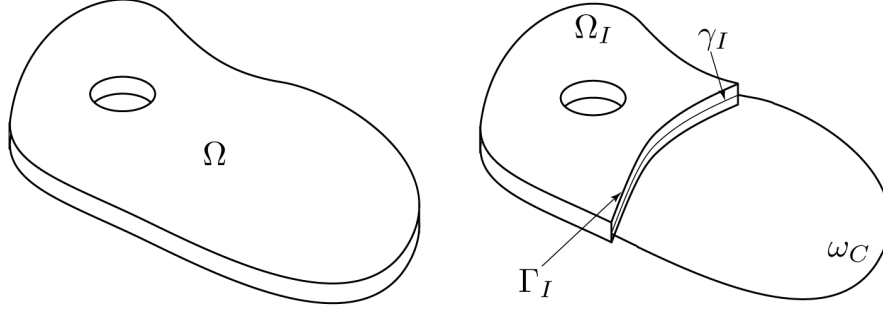


FIGURE 5.1 – Définition du modèle de référence et du modèle hybride.

- $\mathbf{R}$  : matrice de taille (ddl d'interface 3D =  $3 \times \text{nœuds de } \Gamma$ )  $\times$  (ddl d'interface plaque =  $5 \times \text{nœuds de } \gamma$ ) qui associe un mouvement de section rigide d'une colonne de nœuds 3D à chaque degré de liberté plaque.  $\mathbf{R}^T$  permet de calculer les efforts plaques sur une coupe de normale  $\underline{x}$ .
- $\tilde{\mathbf{R}}$  : extension de la matrice précédente, de taille (ddl d'interface 3D =  $3 \times \text{nœuds de } \Gamma$ )  $\times$  (efforts généralisés sur l'interface =  $8 \times \text{nœuds de } \gamma$ ) telle que  $\tilde{\mathbf{R}}^T$  permette de calculer l'ensemble des efforts généralisés associés à une distribution d'effort 3D.
- $\boldsymbol{\tau}$  : matrice de taille (ddl d'interface 3D =  $3 \times \text{nœuds de } \Gamma$ )  $\times$  (ddl d'interface plaque =  $5 \times \text{nœuds de } \gamma$ ) qui décrit les relèvements en contrainte définis au chapitre 3 pour une coupe de normale  $\underline{x}$ .
- $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  : extension de la précédente, de taille (ddl d'interface 3D =  $3 \times \text{nœuds de } \Gamma$ )  $\times$  (ddl d'interface plaque =  $8 \times \text{nœuds de } \gamma$ ) qui décrit l'ensemble des relèvements en contrainte définis au chapitre 3. On note  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  les composantes de  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  qui ne sont pas dans  $\boldsymbol{\tau}$ .
- $\boldsymbol{\mu}$  : matrice de taille (ddl d'interface 3D =  $3 \times \text{nœuds de } \Gamma$ )  $\times$  (ddl d'interface plaque =  $8 \times \text{nœuds de } \gamma$ ) qui décrit l'ensemble des relèvements en gauchissement définis au chapitre 3.

On rappelle que les relèvements ont été construits de manière à vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{I} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \boldsymbol{\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

### 5.2.1.1 Étape de correction

Cette étape est commune à tous les raccords, elle consiste simplement à la suite d'un calcul fin, à calculer les efforts généralisés afin de pouvoir évaluer le déséquilibre entre les modèles. Soit  $\boldsymbol{\lambda}_\Gamma^F$  la réaction 3D du modèle fin, les efforts généralisés associés  $\boldsymbol{\lambda}_\gamma^F$  se calculent simplement comme :

$$\boldsymbol{\lambda}_\gamma^F = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda}_\Gamma^F \tag{5.28}$$

### 5.2.1.2 Raccord en effort

Ce raccord consiste simplement à imposer le relèvement des efforts plaques sur le domaine 3D. Il revient à résoudre à l'étape locale :

$$\mathbf{S}^F \mathbf{u}^F = \mathbf{b}^F + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^C \quad (5.29)$$

### 5.2.1.3 Raccord en déplacement faible

Ce raccord s'écrit naturellement avec des multiplicateurs de Lagrange à l'interface, dont on a vu qu'ils étaient égaux aux efforts généralisés de réaction du modèle fin :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}^F & \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^F \\ \boldsymbol{\lambda}_\gamma^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^F + \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^C \\ \mathbf{u}^G \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

On peut condenser cette expression :

$$\boldsymbol{\lambda}_\gamma^F = \left( \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{S}^{F-1} \boldsymbol{\tau} \right)^{-1} \left( \mathbf{u}^G - \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{S}^{F-1} \left( \mathbf{b}^F + \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^C \right) \right) \quad (5.31)$$

où l'on voit que le complément de Schur « plaque » associé au modèle fin fait intervenir certaines moyennes de la souplesse 3D. Comme  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^C$  dépend lui même de  $\mathbf{u}^G$ , ce terme d'effort ajouté induit une légère dissymétrie. Le terme  $(\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{S}^{F-1} \hat{\boldsymbol{\tau}})$  correspond à des couplages entre efforts de Saint-Venant différents, il devient négligeable pour des zones 3D suffisamment grandes.

### 5.2.1.4 Raccord en déplacement fort

Concernant le raccord par déplacement imposé sur toute la section, c'est à dire avec ajout des termes de gauchissement, le déplacement local à l'interface peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Gamma^F &= \mathbf{R} \mathbf{u}^G + \boldsymbol{\mu} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^C \\ \boldsymbol{\lambda}_\Gamma^F &= \mathbf{S}^F \mathbf{u}_\Gamma^F - \mathbf{b}^F \\ \boldsymbol{\lambda}_\gamma^F &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda}_\Gamma^F \end{aligned} \quad (5.32)$$

Comme précédemment, on peut condenser l'expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_\gamma^F &= \mathbf{R}^T (\mathbf{S}^F \mathbf{u}_\Gamma^F - \mathbf{b}^F) \\ &= \mathbf{R}^T \mathbf{S}^F \mathbf{R} \mathbf{u}^G + \mathbf{R}^T \mathbf{S}^F \boldsymbol{\mu} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^C - \mathbf{R}^T \mathbf{b}^F \end{aligned} \quad (5.33)$$

Où l'on voit que dans ce cas le complément de Schur « plaque » du modèle 3D correspond à une moyenne de la rigidité 3D. De même que précédemment, la dépendance de  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^C$  à  $\mathbf{u}^G$  induit une dissymétrie, et le terme  $(\mathbf{R}^T \mathbf{S}^F \boldsymbol{\mu})$ , qui correspond à la génération d'efforts plaque par des gauchissements, est négligeable pour un domaine 3D pris suffisamment grand.

*Remarque.* Étant donnée la faiblesse relative des termes dissymétriques, le gradient conjugué continue à être utilisable pour un objectif de précision raisonnable.



### 5.2.2 Introduction d'une « zone tampon »

Dans le chapitre 4, on a vu que les différents raccords pouvaient, dans le cas de plaques stratifiées, provoquer de faibles effets de bord à l'interface, inévitables pour les modèles plaques utilisés. Or, dans la stratégie non-intrusive utilisée, il est important que les forces relevées à l'interface représentent correctement la solution, afin de ne pas introduire d'effets parasites dans l'évaluation du résidu à l'interface.

La solution que nous proposons, illustrée sur la figure 5.2, est de séparer l'interface de « descente »  $\Gamma_C$ , bord de la zone 3D où les conditions limites sont relevées, de celle de « remontée »  $\Gamma_I$  à l'intérieur de la zone 3D, là où le déséquilibre d'efforts est évalué. Cette technique peut s'interpréter comme l'introduction d'une interpénétration entre la zone d'intérêt 3D et la zone purement plaque. L'analyse de la section 5.1.3 nous conduit à voir cette approche comme une méthode de Schwarz optimisée avec recouvrement, ce qui assure les bonnes propriétés mathématiques de la méthode.

Sur l'interface  $\Gamma_I$ , il y a la présence d'un saut de déplacement en plus d'un saut d'effort, puisque la continuité des déplacements n'est imposée que sur  $\Gamma_C$ . Ce qui fait que l'on peut considérer l'ajout d'une bande sur le modèle local comme une façon d'approximer une condition limite mixte sur  $\Gamma_I$ .

La solution 3D comprise dans la zone tampon  $\Omega_B$  est définie mais son interprétation n'est pas évidente. Elle peut être vue comme une solution de transition entre la solution 3D et la solution relevée à l'interface.

En pratique, le seul point à modifier est le calcul de la quantité  $\lambda^F$  qui représente les forces nodales locales sur l'interface  $\Gamma_C$ . Le post-traitement utilise une technique similaire à celle permettant d'extraire  $\lambda^C$ , à savoir la projection des contraintes de  $\Omega_I$  en tant que forces nodales sur  $\Gamma_I$ .

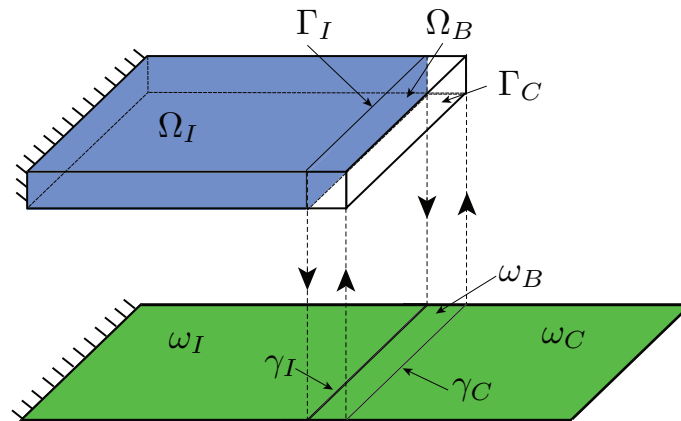


FIGURE 5.2 – Schéma du couplage avec recouvrement.

On résume ici l'intérêt de l'introduction de la zone tampon  $\Omega_B$  :

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

- Elle permet d’absorber les petits effets parasites artificiels, et permet une bonne évaluation des quantités généralisées sur  $\Gamma_C$ . En pratique les effets de bord décroissent rapidement et 1 ou 2 bandes d’éléments suffisent.
- Elle permet d’utiliser des raccords en efforts (sous réserve de problème 3D bien posé).
- Elle permet de traiter certaines incompatibilités de maillages : on a vu, dans l’analyse de la section 5.1.1, que sur  $\gamma_I$  la solution plaque est discontinue en effort. Il est donc nécessaire que  $\gamma_I$  coïncide avec des bords d’éléments plaque.  $\Gamma_C$  peut quant-à elle être définie librement comme le bord de la zone 3D. Les premières expériences autour de cette idée sont présentées à la section 6.3.3.

Par exemple sur le problème de la plaque stratifiée en flexion, lors de la première descente, les efforts généralisés locaux sont calculés par intégration dans l’épaisseur. On retrouve alors les mêmes effets que ceux précédents vu, par exemple FIG. 4.8d au chapitre 4. Les efforts ainsi obtenus dans le modèle local à l’interface  $\gamma_C$  sont plus proches des efforts plaques obtenus le long du bord du domaine local  $\gamma_I$ . La zone tampon, sous réserve qu’elle possède un comportement linéaire, permet d’absorber les perturbations liées aux lacunes du raccord pour des plaques stratifiées, de relever des efforts plus cohérents et ainsi d’avoir moins de correction à faire.

### 5.2.3 Mise en œuvre de la méthode

Pour sa stabilité et sa facilité de mise en œuvre, la technique du raccord en déplacement complet (Dirichlet fort) a été retenue. De même, pour ses effets bénéfiques sur l’évaluation des contraintes, un léger recouvrement est systématiquement employé.

La mise en œuvre repose sur un script Python externe pilotant l’ensemble de la stratégie :

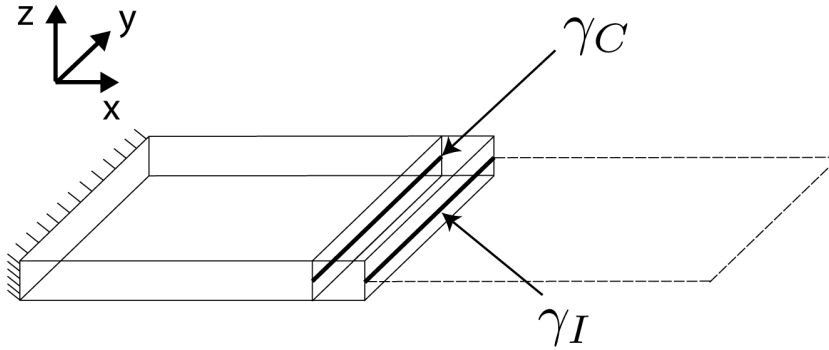
- génération des fichiers de commandes,
- appel à l’exécution des solveurs successivement,
- lecture des résultats,
- évaluation et calcul des quantités d’interfaces nécessaires à fournir aux solveurs.

Le résidu entre les deux modèles est évalué en termes d’efforts généralisés définis aux nœuds, car c’est sur ces quantités que l’on applique la correction dans le modèle global. Ainsi pour calculer  $\mathbf{r} = -(\boldsymbol{\lambda}^F + \boldsymbol{\lambda}^C)$ , les forces  $\boldsymbol{\lambda}^C$  sont déjà des efforts plaques, mais il est nécessaire d’intégrer les forces nodales du domaine 3D en forces nodales généralisées plaque. Les détails nécessaires à ce calcul sont donnés en annexe B.

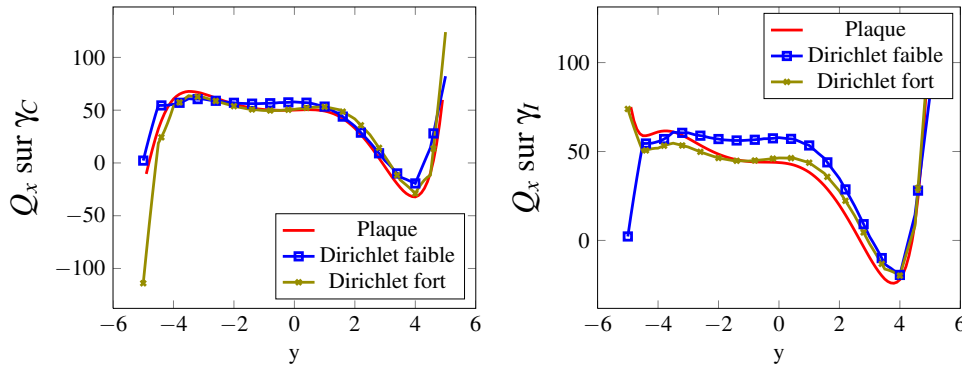
Le choix portant sur les forces nodales possède plusieurs avantages :

- le champ est localisé aux nœuds, on a ainsi des quantités exactes et faciles à manipuler dans le cas de maillages conformes,
- il n’y a pas de repère local lié à l’orientation de la section, ainsi les coins sur l’interface ne posent pas de difficulté particulière,
- l’ajout de forces nodales en tant que chargement correctif est une fonctionnalité courante dans les codes de calculs.

Ainsi la mise en œuvre de la méthode ne pose pas de réelles difficultés, l’ajout de la



(a) Extraction selon les lignes  $\gamma_I$  ( $y = 5$ ) pour le bords et  $\gamma_C$  ( $y = 4$ ) pour la correction.



(b) Cisaillement à l'interface de correction  $\gamma_C$  (c) Cisaillement à l'interface de bord  $\gamma_I$

**FIGURE 5.3** – Comparaison des efforts généralisés le long des interfaces  $\gamma_I$  et  $\gamma_C$  lors de la première descente.

prise en compte de deux interfaces et l'accélération Krylov, restent dans le cadre non-intrusif fixé et nous permet de conserver une grande flexibilité sur les types de solveurs que l'on peut utiliser.

### 5.3 Exemple sur un cas de plaque trouée stratifiée

Afin de tester les différents algorithmes, on choisit de modéliser une plaque stratifiée trouée en flexion, telle que représenté sur le schéma FIG. 5.4. On utilise le même empilement de plis orthotropes que celui défini dans 3.2, et les dimensions de la plaque sont  $L = a = 60$  mm,  $h = 2$  mm. Le rayon du trou est de  $r = 2$  mm. La plaque est encastée sur son bord gauche et un déplacement transverse  $u_d = 0.45$  mm est imposé sur le bord droit.

Le modèle local sur la zone d'intérêt  $\Omega_I$  (carré de côté 20 mm) est une représentation 3D du trou, le modèle global est une plaque qui suivant le cas considéré possède ou non une représentation du trou. En effet puisque le modèle local est substitué dans le modèle plaque, la définition du modèle plaque dans la zone d'intérêt influence uniquement sur la

vitesse de convergence. La largeur de la zone tampon  $\Omega_B$  est de 2 mm

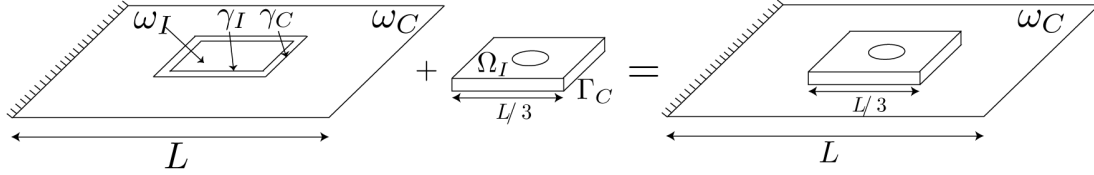


FIGURE 5.4 – Représentation de la séparation des modèles dans la plaque trouée.

### 5.3.1 Convergence vers le modèle hybride

Dans un premier temps on étudie la convergence en fonction de la présence ou non du trou dans la définition du modèle plaque dans  $\omega_I$ . On propose d'utiliser un critère sur les efforts généralisés à l'interface défini de la façon suivante :

$$\eta_i^2 = \frac{\int_{\gamma_I} |(\underline{N}_i^{3D} + \underline{N}_i^P) \cdot \underline{n}|^2 ds}{\max_{\gamma_I} |\underline{N}_0^P \cdot \underline{n}|^2} + \frac{\int_{\gamma_I} |(\underline{M}_i^{3D} + \underline{M}_i^P) \cdot \underline{n}|^2 ds}{\max_{\gamma_I} |\underline{M}_0^P \cdot \underline{n}|^2} + \frac{\int_{\gamma_I} |(\underline{Q}_i^{3D} + \underline{Q}_i^P) \cdot \underline{n}|^2 ds}{\max_{\gamma_I} |\underline{Q}_0^P \cdot \underline{n}|^2}$$

On peut voir sur la figure FIG. 5.5 que la présence ou non du trou influe assez peu sur la vitesse de convergence et a surtout un impact sur le résidu initial : quand le trou est présent dans le modèle plaque, ce dernier représente mieux la zone d'intérêt et donc le déséquilibre initial est moins important.

Comme attendu, l'algorithme de gradient conjugué est plus efficace que l'algorithme de point fixe : à modèle fixé, on divise par deux le nombre d'itérations pour atteindre un certain niveau de résidu. Seulement deux itérations de gradient conjugué avec un modèle plaque plein, sont nécessaires pour obtenir la même qualité qu'une approche de type "submodelling" (itération 0) avec un modèle de plaque trouée, qui est plus complexe à générer qu'une plaque pleine maillée régulièrement.

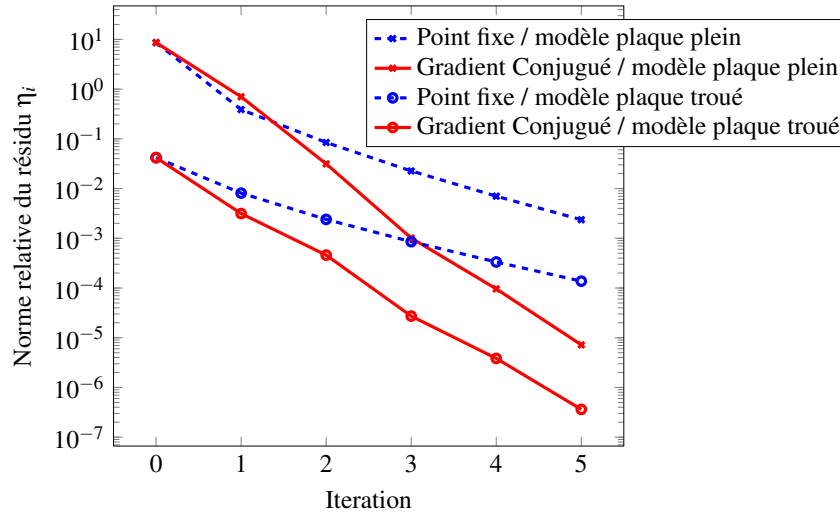
### 5.3.2 Validation du modèle hybride

La convergence de l'algorithme ne suffit pas, il faut également s'assurer que le modèle hybride vers lequel on converge est « proche » d'un problème de référence 3D sur tout le domaine  $\Omega$ . Pour cela on regarde la solution obtenue après quelques itérations de l'algorithme de gradient conjugué et en utilisant le modèle plaque plein.

Les quantités d'intérêt choisies ici sont les contraintes au bord de trou. On représente leur évolution le long d'une ligne à 45° décrite sur le schéma FIG. 5.6.

Les FIG. 5.7 donnent la comparaison entre les valeurs de contraintes obtenues entre le modèle de référence, la première descente (qui correspond à du « submodelling »), et les contraintes après quelques itérations.

Il apparaît que la solution à l'itération 0 est évidemment assez éloignée de la référence, alors qu'après quelques itérations, le modèle hybride est devenu très proche de celle-ci.



**FIGURE 5.5** – Évolution du résidu relatif au cours des itérations sur l'exemple de la plaque trouée.

Dans le cas où l'on utilise un modèle global troué, les figures FIG. 5.8 montrent l'évolution du moment et de l'effort de cisaillement sur la ligne à 45°, pour les modèles de référence et hybride à 0 et 5 itérations. On remarque que le modèle plaque trouée n'est équivalent au modèle de référence que suffisamment loin du trou, alors que le modèle hybride est bien plus fidèle.

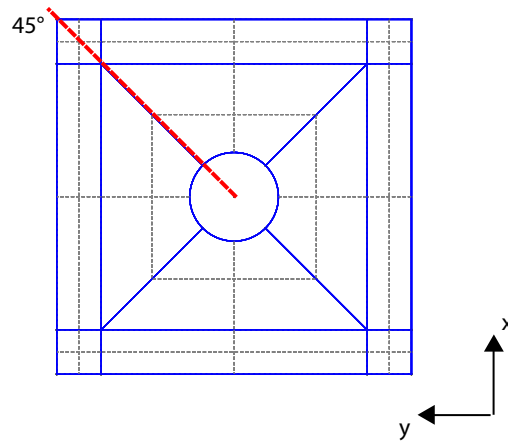
Ces résultats montrent que la méthode converge bien vers un modèle « hybride ». Celui-ci diffère de la référence 3D à cause de la modélisation plaque employée dans  $\Omega_C$  mais, après quelques itérations, les quantités d'intérêt sont assez fidèlement reproduites.

Le calcul d'erreur sur ce genre de simulation soulève de nombreuses difficultés. Notamment parce qu'on doit distinguer l'écart de la solution obtenue à une itération donnée par rapport au modèle hybride (obtenu à la limite de ces itérations), de l'écart de la solution hybride par rapport au modèle de référence. La première erreur est liée au résidu de la méthode, défini comme le déséquilibre entre la zone complémentaire et la zone d'intérêt 3D. La deuxième erreur, liée à un écart de modélisation entre la solution de référence et la solution hybride, est difficile à quantifier. Elle mesure le fait que la modélisation plaque n'est pas adaptée au problème considéré. Dans le cas de notre couplage plaque/3D, celle-ci peut être par exemple estimée par la non-vérification de l'état de contrainte plane dans le domaine 3D.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a pu voir la mise en place de la stratégie itérative pour le couplage plaque/3D, et sa convergence vers un modèle hybride.

En alternative à l'algorithme de point fixe, un algorithme de gradient conjugué pré-conditionné a été développé pour résoudre le problème hybride. Il permet d'augmenter



**FIGURE 5.6** – Extraction au bord du trou.

de façon importante la vitesse de convergence sans effectuer d'appel supplémentaire au solveur, et de supprimer la contrainte d'avoir un modèle grossier plus rigide que le modèle fin. Cependant cette méthode est limitée à un comportement linéaire.

Il a été montré sur un exemple de plaque trouée que la méthode converge bien vers un modèle hybride proche de la référence 3D, même si le modèle plaque grossier (y compris la géométrie) est assez éloigné du modèle fin dans la zone d'intérêt.

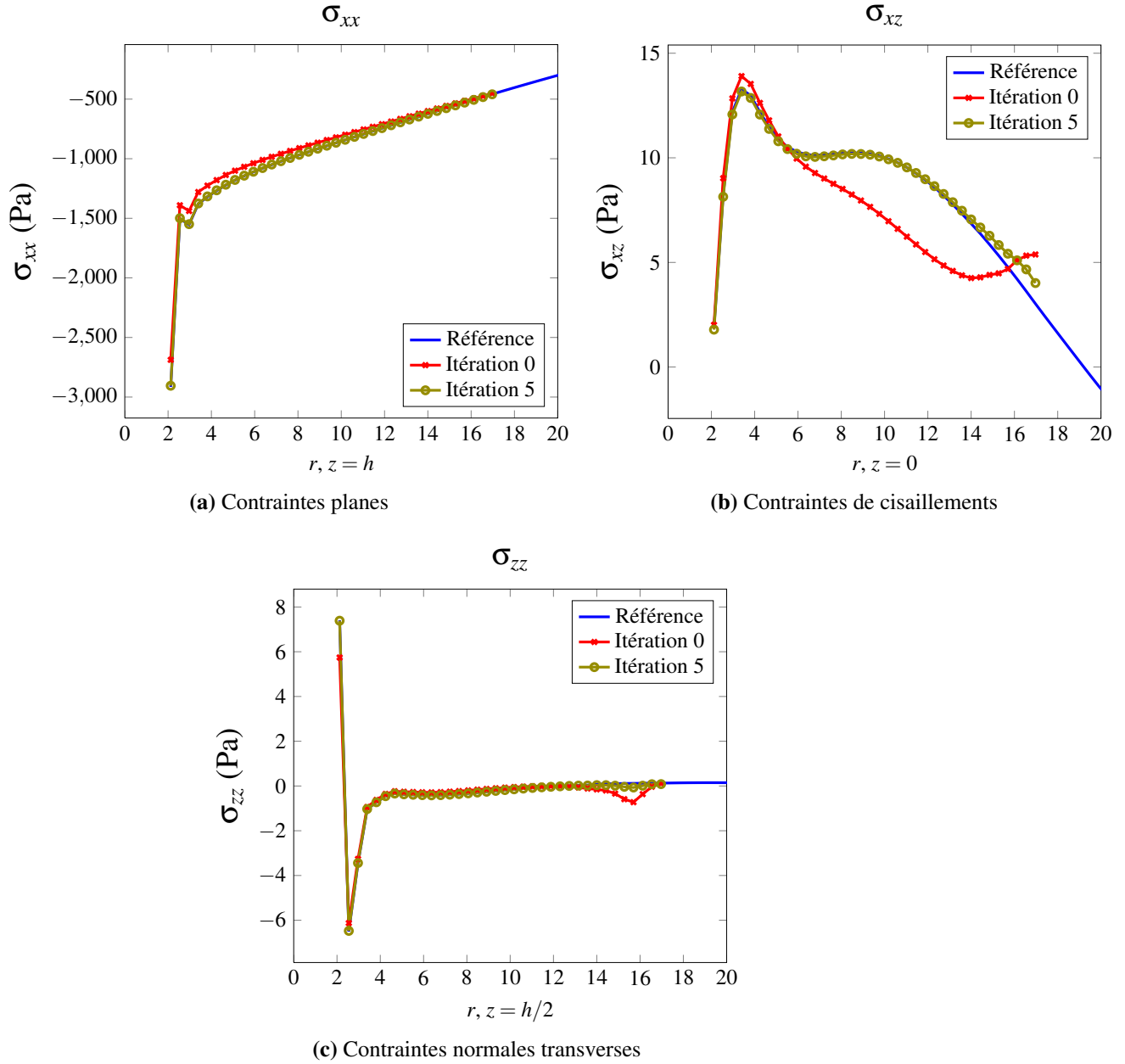
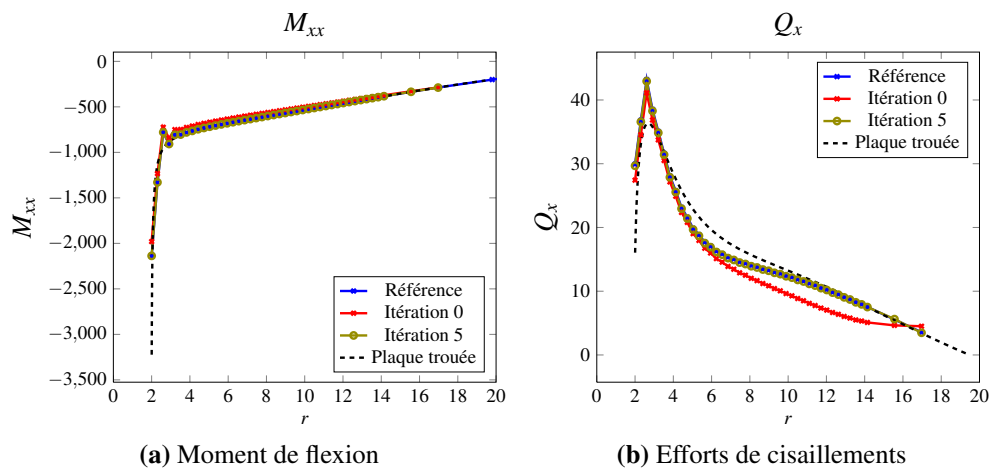


FIGURE 5.7 – Contraintes le long d’une ligne à 45 degrés.



**FIGURE 5.8** – Évolution des efforts généralisés le long d’une ligne à 45°





# Chapitre 6

## Application et développement de la méthode

*Dans ce chapitre, des premières applications de la stratégie sur des cas d'assemblage sont étudiées. Afin de traiter efficacement les cas de contact, un couplage Code\_Aster/COFAST est mis en œuvre. Dans un second temps, les limites actuelles du raccord sont présentées ainsi que des pistes d'amélioration.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Cas d'assemblage de plaques</b>	<b>124</b>
6.1.1	Premier exemple, sans contact	124
<b>6.2</b>	<b>Traitement de plusieurs zones locales</b>	<b>135</b>
<b>6.3</b>	<b>Limites et perspectives d'évolution de la stratégie non-intrusive</b>	<b>137</b>
6.3.1	Cas de chargements mal pris en compte	138
6.3.2	Placement et validité du raccord	139
6.3.3	Traitement de maillages incompatibles	144
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>146</b>

---

La simulation d'assemblages boulonnés de plaques composites est un problème important de l'industrie aéronautique. Ces calculs visent à estimer l'état d'endommagement autour des liaisons et évaluer les phénomènes globaux de transfert de charge. Outre l'endommagement, une difficulté majeure de ces calculs est la prise en compte des contacts entre les différents composants. Actuellement des modèles réduits (plaque, poutre,...) et connecteurs sont utilisés pour dimensionner les liaisons et une approche descendante est utilisée pour observer de « petits » modèles 3D.

Les connecteurs poutre, qui représentent une modélisation réduite de la liaison, sont des sources d'imprécisions importantes. Leur comportement est complexe à identifier puisqu'il synthétise du contact et du frottement, et il doit être paramétré par l'effort de serrage.

La prise en compte d'un modèle 3D pouvant « virtuellement » se substituer à ces connecteurs simplifiés est une idée intéressante que l'on se propose de traiter ici dans le cadre du couplage non-intrusif. Par cette approche, les bureaux d'études n'auraient ni à changer de modèles réduits ni de logiciels, puisque le couplage non-intrusif est effectué entre logiciels du commerce, façon « boîtes noires », et des codes dédiés au calcul 3D local.

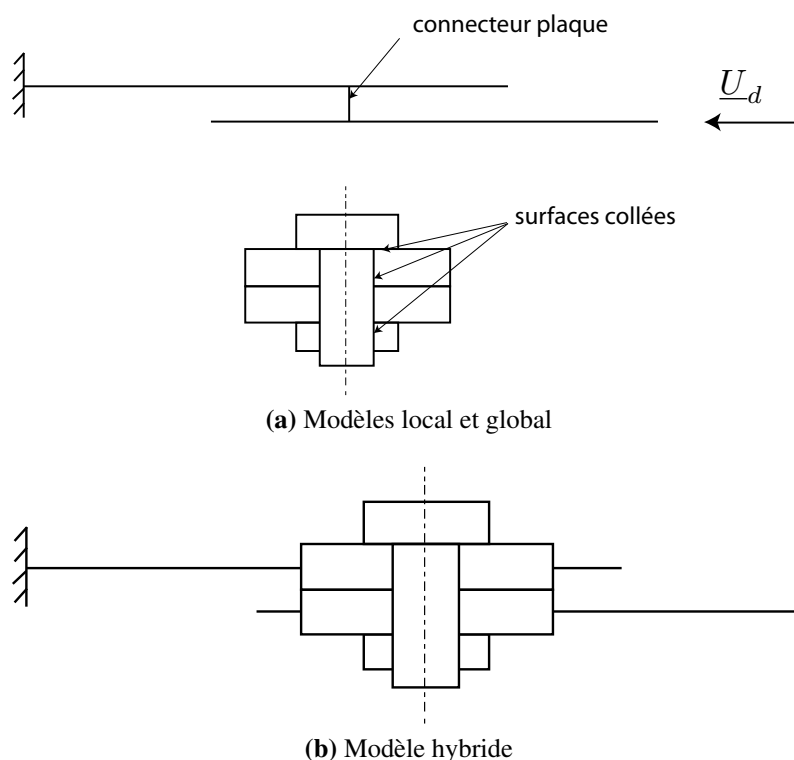
Dans une première partie, la méthode non-intrusive est utilisée pour traiter des cas d'assemblage assez simples. La prise en compte du contact entre les plaques et le boulon nous donne l'occasion de développer un couplage Code\_Aster/COFAST3D, pour un traitement plus efficace de la zone locale. Dans une deuxième partie, les limites du raccord actuels sont évoquées et discutées, et des pistes sont données pour faire évoluer ce type de couplage.

## 6.1 Cas d'assemblage de plaques

### 6.1.1 Premier exemple, sans contact

Un exemple simple illustrant un problème d'assemblage boulonné est proposé ici. Deux plaques sont reliées entre elles par une liaison boulonnée, dont le schéma est présenté FIG. 6.1. Elles ont une longueur  $L = 100$  mm, une largeur  $l = 60$  mm, et une épaisseur  $h = 2$  mm. La plaque supérieure est encastree et on applique un déplacement plan  $\underline{U}_d = -0.4 \cdot \underline{e}_x$  sur la plaque inférieure. Afin de rester aussi simple que possible, le comportement est isotrope homogène dans les plaques.

La zone d'intérêt est représentée par un modèle 3D contenant le boulon : la vis, l'écrou et une portion 3D des plaques autour du trou. Ce modèle local est pour l'instant linéaire élastique avec les caractéristiques matériau données dans le tableau 6.1. Le modèle global est un assemblage des deux modèles plaques reliées par un connecteur simplifié. Le choix de ce connecteur n'influe pas sur le modèle hybride final, puisqu'il est substitué, mais sur la convergence de la méthode. On choisit un connecteur très rigide par rapport à la liaison 3D, ce qui assure la convergence de la méthode du type point-fixe, en lui affectant



**FIGURE 6.1** – Modèles utilisés dans la liaison boulonnée.

un module Young beaucoup plus grand que celui du boulon. Ce connecteur est représenté sur le schéma FIG. 6.2.

Plaque	Boulon	Connecteur poutre
$E = 2 \text{ MPa}$	$E = 10 \text{ MPa}$	$E = 2000 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.3$

**TABLE 6.1** – Propriétés matériaux utilisés dans les assemblages.

*Remarque.* L'implémentation dans le Code\_Aster de ce connecteur est réalisée en deux temps. Tout d'abord, on définit les zones rigides en utilisant dans `AFFE_CHAR_MECA()` le mot-clé :

```
LIAISON_SOLIDE=(
_F (GROUP_MA=ZONE_SUP) ,
_F (GROUP_MA=ZONE_INF) , )
```

Cela a pour effet de donner un mouvement de corps rigide à l'ensemble des nœuds de `ZONE_SUP` et de `ZONE_INF`. Ensuite, on relie la cinématique du modèle plaque au modèle poutre par le mot-clé :

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

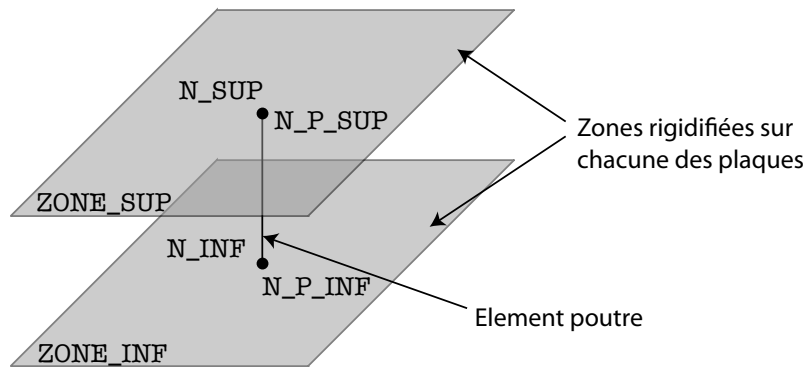
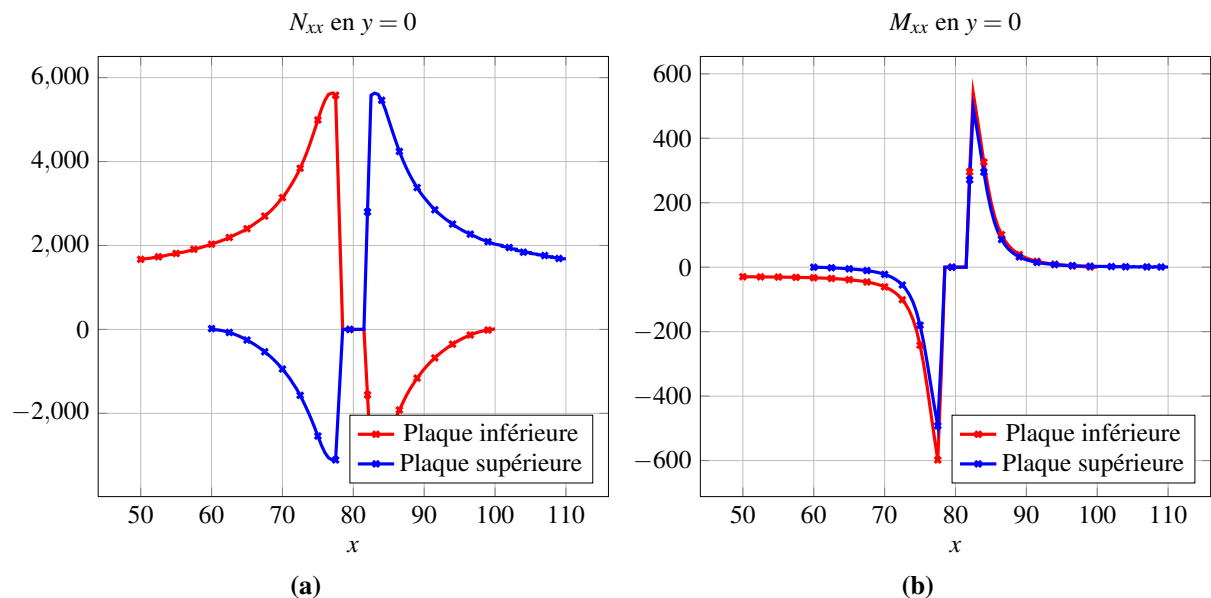


FIGURE 6.2 – Définition du connecteur poutre.

```
LIAISON_UNIF=(
_F (NOEUD=('N_SUP','N_P_SUP'),DDL=('DX','DY','DZ','DRX','DRY','DRZ')),
_F (NOEUD=('N_INF','N_P_INF'),DDL=('DX','DY','DZ','DRX','DRY','DRZ')),
)
```

où  $N\_SUP$  est le nœud appartenant à la plaque supérieure et  $N\_P\_SUP$  est son correspondant appartenant à l'élément poutre (et de même pour la plaque inférieure).

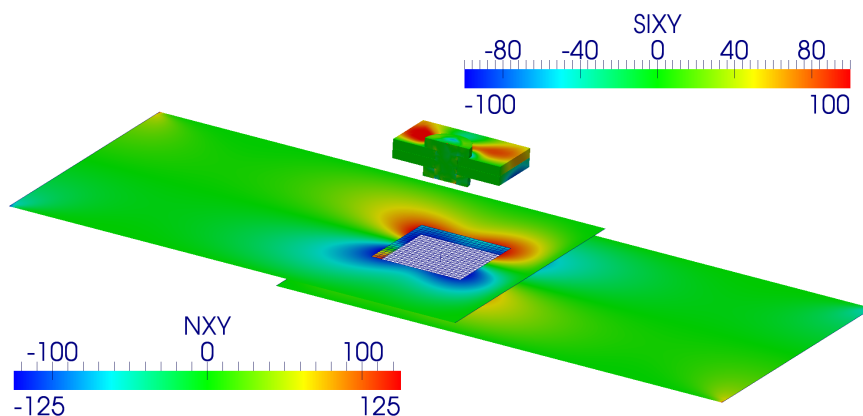
La taille de la zone rigidifiée dans le modèle plaque est choisie de façon à ce que les effets de bord provenant du connecteur, représentée sur la figure FIG. 6.3, n'interfèrent pas avec l'extraction des efforts. Ici cette taille correspond approximativement à la largeur du boulon.

FIGURE 6.3 – Évolution de  $N_{xx}$  et  $M_{xx}$  dans la longueur.

### 6.1.1.1 Cas de liaison collée

Dans un premier temps afin de tester le raccord en déplacement et la stratégie itérative, le connecteur est simplement remplacé par son « équivalent » 3D sans contact, c'est à dire que les surfaces entre le boulon et les plaques sont collées et que la surface entre les deux plaques est libre.

La taille de la zone locale doit être suffisamment grande pour contenir les effets localisés provenant du boulon. Ici, comme un comportement isotrope est utilisé, les effets localisés générés sont compris dans une zone de largeur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, ainsi pour une épaisseur de 2 mm et un boulon de diamètre 5 mm, on considère un modèle local 3D sur une portion carré de 20 mm de côté. La figure FIG. 6.4 offre une visualisation des contraintes de cisaillement dans le modèle plaque et dans le modèle global.

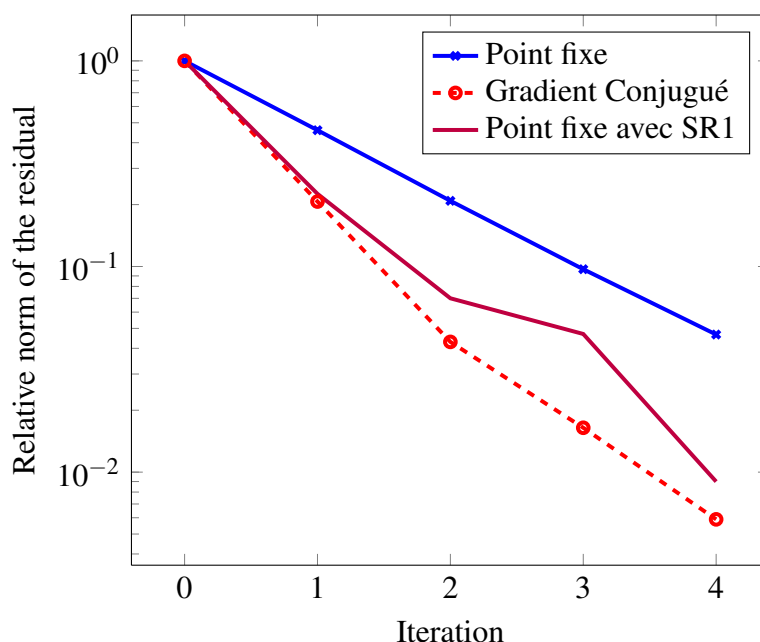


**FIGURE 6.4** – Effort généralisé  $N_{xy}$  et contrainte  $\sigma_{xy}$  à la première descente.

L'accélération SR1 ([Gendre *et al.*, 2011]) a été ajoutée afin de la comparer à la méthode de point fixe classique et à l'algorithme de gradient conjugué. Le graphe FIG. 6.5 représente les courbes de convergence des trois méthodes.

L'utilisation d'une accélération de convergence permet ici de diviser par deux le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un objectif de résidu fixé. Par ailleurs, à connecteur fixé, la vitesse de convergence est liée au problème fin considéré : dans un cas plus rigide, par exemple en collant une zone de la surface entre les deux plaques ( $\varnothing 8$  mm), on obtient les courbes de convergence représentées figure FIG. 6.6, où on observe un meilleur taux de convergence pour le point fixe, ce qui signifie que le connecteur entre plaques est plus semblable à ce type de modélisation fine.

*Remarque.* On observe également que les vitesses de convergence des méthodes accélérées



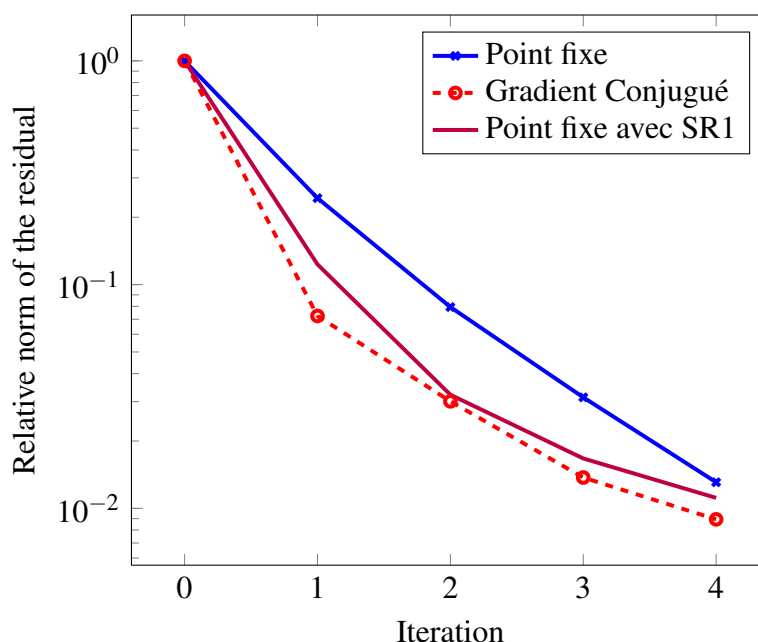
**FIGURE 6.5** – Évolution du résidu relatif au cours des itérations (connecteur « souple »).

rées semblent se dégrader au cours des itérations. Ce phénomène peut provenir de multiples sources :

- Soit le résidu des corrections devient du même ordre de grandeur que les perturbations provenant des surfaces collées. La distance de  $3h$  entre la zone d'évaluation du résidu et la zone collée est peut-être trop faible, ce qui pourrait se corriger en considérant un modèle local plus grand.
- Soit de la précision numérique est perdue au cours des manipulations des quantités d'interfaces. En effet dans le gradient conjugué les appels aux solveurs servent à déterminer le minimum dans chaque direction de recherche, et le résidu est uniquement évalué par mise à jour, au fil des itérations il est possible que numériquement ce résidu dévie du déséquilibre effectif à l'interface. Dans ce cas un redémarrage du solveur est nécessaire.
- Soit la non-symétrie du problème introduite par le raccord dégrade la convergence du gradient conjugué. Il pourrait être intéressant de mettre en œuvre un solveur de Krylov mieux adapté comme GMRes ou BiCG.

L'algorithme SR1 a montré quelques irrégularités dans la convergence. Afin de contrôler ce problème, une vérification de l'ordre de grandeur du déplacement correctif a été mise en œuvre : s'il est trop faible, l'étape de mise à jour de l'opérateur de correction est simplement sautée.

On voit sur la figure FIG. 6.7 que la solution à convergence est peu différente de celle obtenue par *submodelling*, tant pour la partie locale que pour la partie globale. L'exemple choisi ici est probablement trop simple pour observer une redistribution d'efforts entre l'état initial et celui convergé.



**FIGURE 6.6** – Évolution du résidu relatif au cours des itérations (connecteur « rigide »)

### 6.1.1.2 Prise en compte du contact

Afin d'introduire du contact dans le problème précédent, on modifie la définition du modèle local de manière à ce que toute la zone de contact potentiel soit contenue dans la zone d'intérêt. Cela a pour effet d'augmenter de façon importante la taille du problème local. Un schéma de ce problème est représenté 6.8.

En gardant le même raffinement de maillage que précédemment et en utilisant des éléments à 27 nœuds (l'algorithme de contact dans le Code\_Aster est plus stable pour des éléments complets), on obtient un problème à environ 900000 degrés de liberté dont la surface de contact comporte 9000 nœuds, ce qui en fait un calcul relativement lourd (environ 10 heures de calcul monoprocasseur).

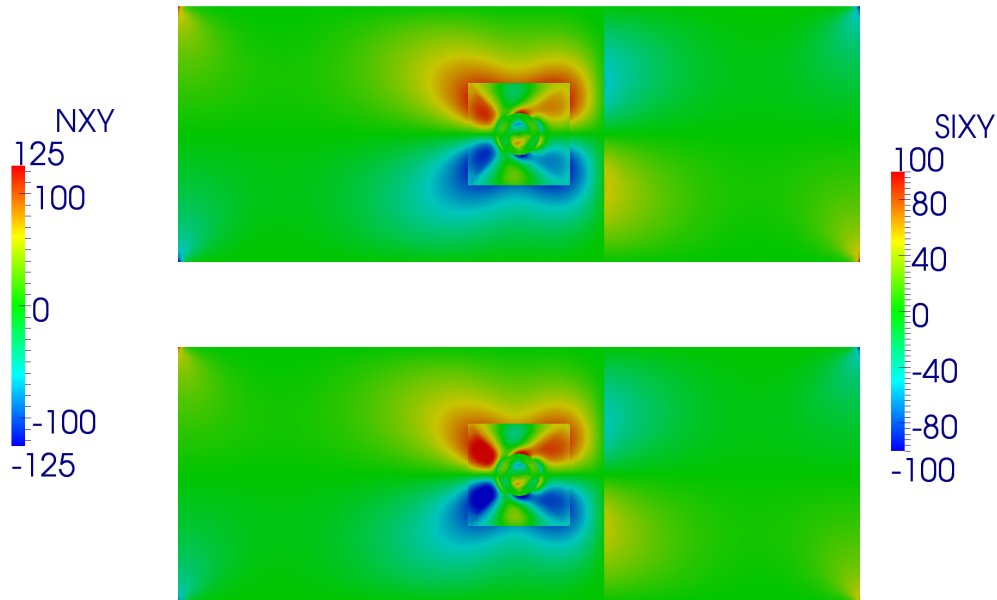
Pour ce cas, seule la méthode « point fixe » a été utilisée pour traiter ce cas non-linéaire<sup>1</sup>. La convergence, représentée sur la figure FIG. 6.10, est régulière quoi que très lente. Les maillages utilisés ainsi que l'allure des contraintes globales et locales après quelques itérations sont données figure FIG. 6.9.

Sur la figure FIG. 6.11, on remarque qu'à la faible décroissance du résidu correspond une variation assez importante du jeu entre les plaques : le jeu obtenu après quelques itérations est bien plus proche de la référence que celui estimé par *submodelling*.

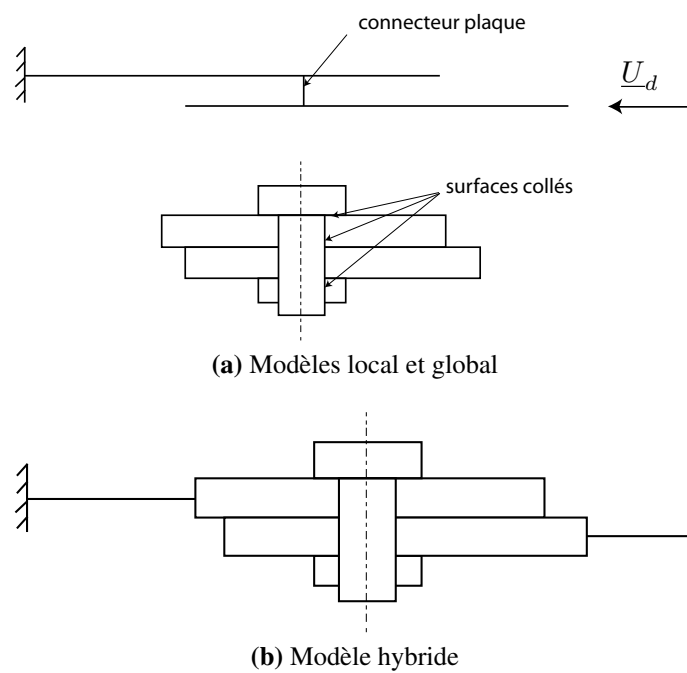
Ainsi la méthode de point fixe s'adapte au cas de contact dans la zone d'intérêt. Néanmoins de nombreuses difficultés apparaissent : nécessité d'une zone d'intérêt plus large, convergence plus lente ou résidu insuffisamment informatif. Une piste pour améliorer ces

1. L'accélération SR1 est envisageable mais n'a pas été testée sur ce cas à cause des défauts de convergence rencontrés sur des problèmes plus petits.



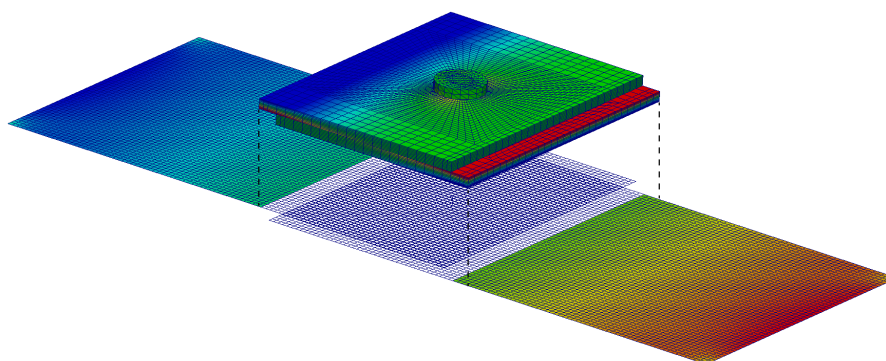


**FIGURE 6.7** – Effort généralisé  $N_{xy}$  et contrainte  $\sigma_{xy}$  à la première descente (en bas) et après 4 itération de gradient conjugué (en haut).



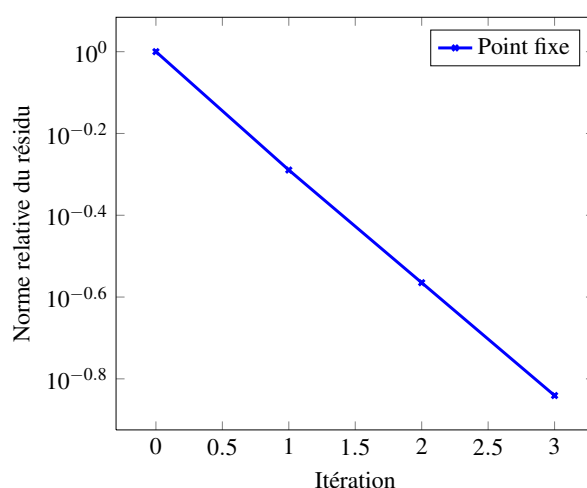
**FIGURE 6.8** – Modèles utilisés et modèle résultant de la liaison boulonnée avec contact.

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*



**FIGURE 6.9** – Représentation des efforts  $M_{xx}$  et des contraintes  $\sigma_{xx}$  dans le problème de contact.

résultats est de complexifier le modèle grossier de façon à ce qu'il corresponde mieux au modèle réel, par exemple en y autorisant le contact.



**FIGURE 6.10** – Évolution du résidu relatif au cours des itérations.

### 6.1.1.3 Couplage Code\_Aster / COFAST3D

L'un des intérêts principaux de la stratégie de couplage non-intrusif est que l'on peut remplacer un solveur par un autre sans impacter en profondeur les outils développés. Il est ainsi possible d'utiliser un solveur plus adapté pour traiter certaines non-linéarités. C'est ce que l'on a choisi de faire ici en utilisant COFAST3D pour résoudre le problème local. COFAST3D est un logiciel basé sur Cast3m [Champaney *et al.*, 1997] qui a été développé au LMT par L. Champaney. Ce solveur particulier utilise la méthode LATIN [Ladevèze et Simmonds, 1999], et ainsi découpe la structure en sous-domaines et interfaces ; la solution est obtenue en alternant des résolutions parallèles sur les sous-domaines linéaires élastiques, et des résolutions sur les interfaces qui portent la non-linéarité de contact.

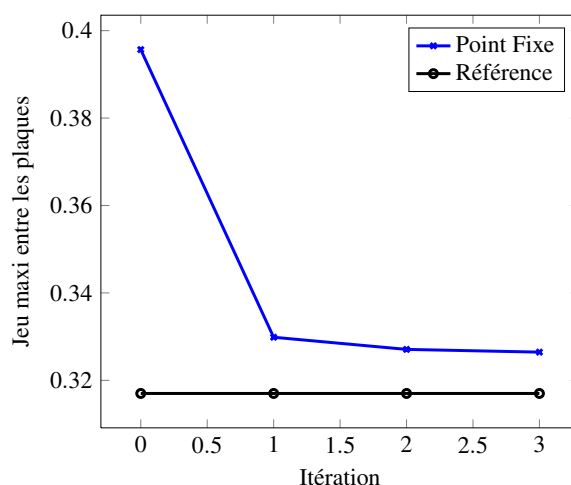


FIGURE 6.11 – Évolution du jeu maximal entre les plaques au cours des itérations.

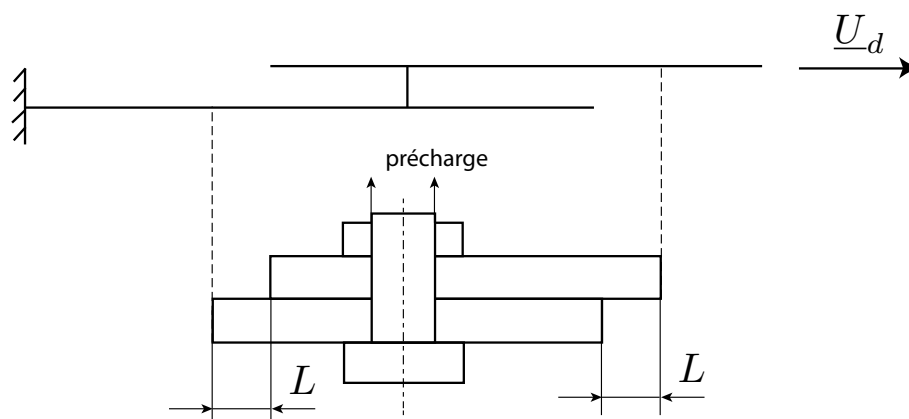


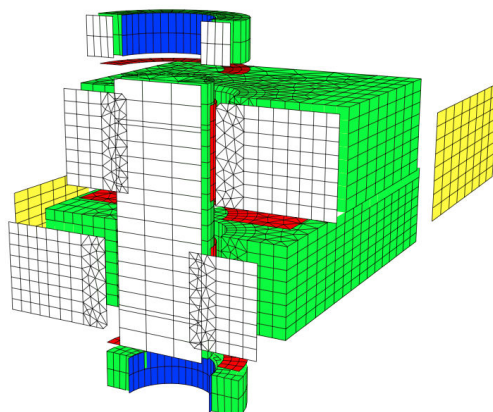
FIGURE 6.12 – Définition du couplage utilisé dans le couplage Code\_Aster / COFAST3D,  $L = 10\text{mm} = 2h$ ,  $U_d = 0.1\text{mm}$ .

On définit ainsi un nouvel exemple d'assemblage boulonné, représenté sur le schéma FIG. 6.12, adapté à COFAST3D, c'est-à-dire avec des éléments linéaires et des maillages compatibles aux interfaces<sup>2</sup>, comme représentée sur la vue éclatée FIG. 6.13.

Chaque interface possède un comportement, au choix : parfait, contact avec (ou sans) frottement, condition limite imposée. À chaque type d'interface on associe un paramètre de rigidité qui permet d'établir des directions de recherche de la méthode LATIN. Ces paramètres sont choisis à partir de considérations sur la géométrie et les matériaux.

En ce qui concerne le raccord plaque/3D, et l'application de conditions limites en déplacements particulières, seules des routines de lecture et d'écriture des résultats avec COFAST3D/CAST3M ont dûes être codées, le reste du script de pilotage est resté identique.

2. Les maillages compatibles sont une restriction de COFAST3D, de plus les interfaces ne doivent pas mélanger éléments triangulaires et quadrangulaires.



**FIGURE 6.13** – Représentation éclatée de la décomposition en sous-structures et interfaces de la liaison boulonnée.

Pour ce cas test, le calcul local nécessite un découpage des pas de temps et l'application de la précharge du boulon avant le chargement de la plaque. On applique donc les conditions limites comme représenté sur le schéma FIG. 6.14. On impose un unique pas de chargement dans le modèle global, de  $t_0$  à  $t_f$ . Dans le modèle local, la précharge du boulon est imposé avant  $t_0$  (par un déplacement imposé de  $0.1\text{ mm}$  entre l'écrou et la vis), puis le chargement provenant du raccord est imposé progressivement jusqu'à  $t_f$ . Le résidu est évalué à  $t_f$  et appliqué en tant que correction à  $t_0$ .

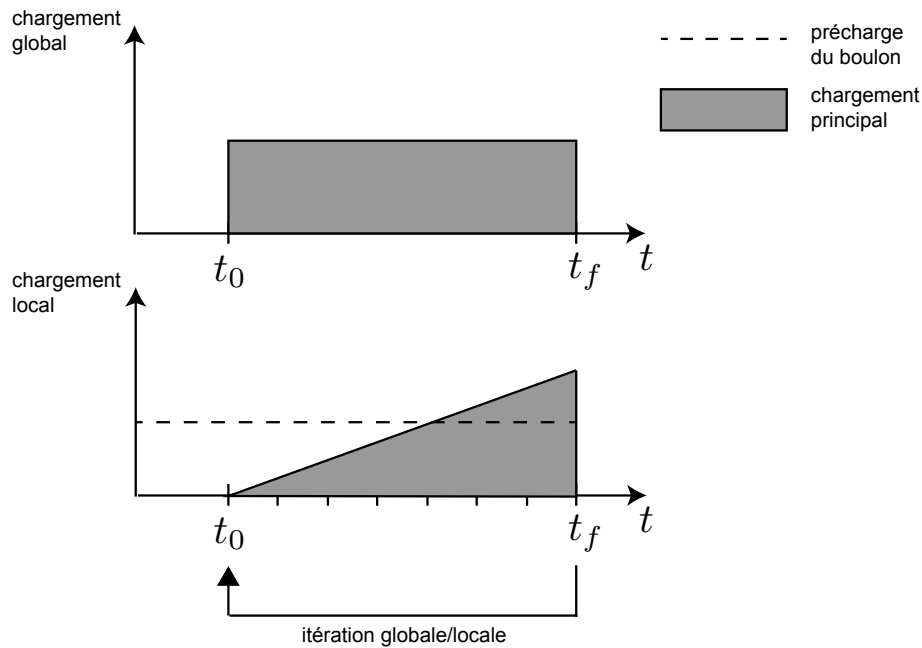
Cette méthode est la plus simple à mettre en pratique mais elle n'est pas idéale, car on ne tient pas compte du « chemin » de chargement mais uniquement de l'état final pour appliquer la correction globale/locale.

Sur la figure FIG. 6.15, la convergence globale de la stratégie est représentée. Celle-ci est un peu plus lente que précédemment dans le couplage Code\_Aster / Code\_Aster, mais cela est normal vue la différence accrue entre les modèles.

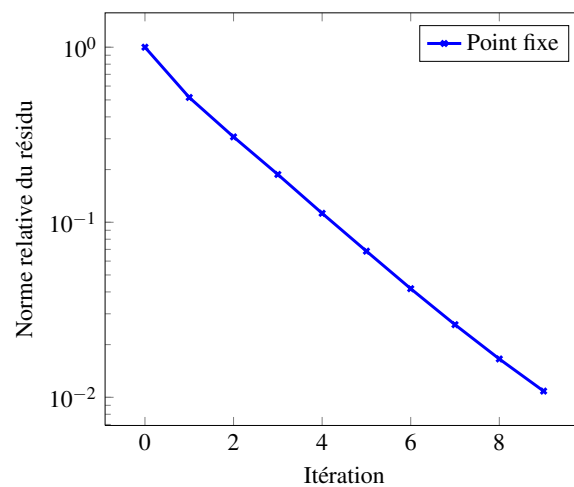
L'utilisation de COFAST est justifiée par le temps de résolution, de 1 à 2 minutes sur les exemples testés ici, ce qui est plus rapide que le solveur d'un code généraliste.

Cas	Itération	$\sigma_{VonMises}$ max (MPa)	erreur (%)	Jeu max (mm)	erreur (%)
Référence	–	$9.84 \cdot 10^2$	–	$2.29 \cdot 10^{-3}$	–
$L = 10$	0	$8.84 \cdot 10^2$	–9.14	$5.82 \cdot 10^{-3}$	154.00
$L = 10$	10	$1.02 \cdot 10^3$	3.66	$5.82 \cdot 10^{-3}$	49.80
$L = 20$	0	$9.1 \cdot 10^2$	–7.52	$3.91 \cdot 10^{-3}$	70.70
$L = 20$	10	$9.99 \cdot 10^2$	1.52	$2.63 \cdot 10^{-3}$	14.80

**TABLE 6.2** – Comparaison de la contrainte de Von Mises maximale et du jeu maximal, entre la solution de référence et la solution locale issue de la descente initiale et à convergence.



**FIGURE 6.14** – Schématisation de l'application des conditions limites dans le temps pour les deux modèles.

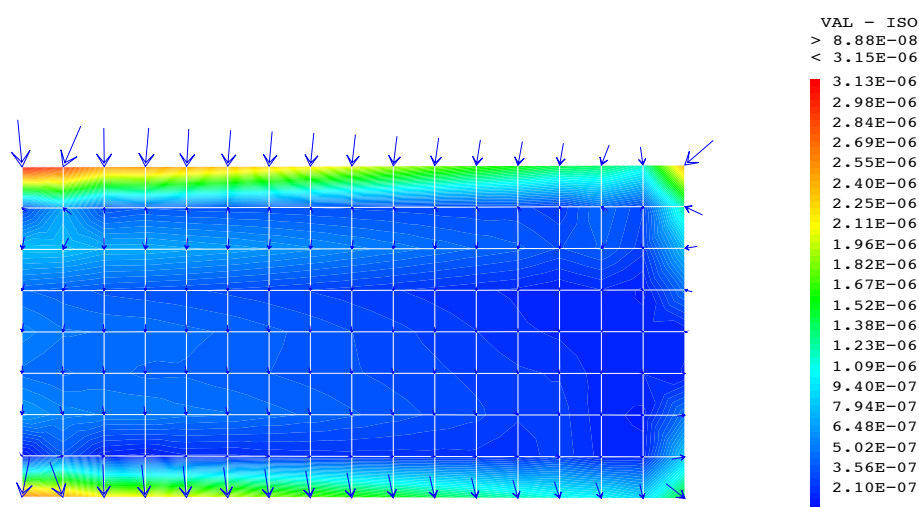


**FIGURE 6.15** – Évolution du résidu relatif au cours des itérations pour le couplage Code\_Aster / COFAST3D

Si l'on compare une quantité locale telle que la contrainte de Von Mises maximale dans le boulon, on peut voir dans le tableau 6.2 que l'écart au modèle de référence diminue bien entre la première descente et quelques itérations. L'erreur sur le jeu maximal entre les plaques est encore plus sévère, mais en éloignant un peu le raccord de la zone d'interface les erreurs obtenues à convergence sont plus acceptables.

Ainsi, il est possible d'utiliser un solveur local dédié, permettant de gagner en perfor-

mances et en adaptabilité. On peut toutefois noter ici que l'utilisation d'un solveur itératif dans le modèle local soulève la question de la tolérance à fixer dans celui-ci, vis-à-vis de la tolérance globale de la stratégie. Notamment, l'utilisation de condition d'interface mixte dans la méthode LATIN implique qu'il existe un saut de déplacement non nul entre les conditions limites que l'on applique à l'interface et le déplacement dans le sous-domaine en vis-à-vis. Une carte du saut de déplacement tangentiel est donnée FIG. 6.16. Du fait de ce glissement, une part de la cinématique imposée (section rigide et gauchissement) est perdue, cela peut donc conduire à une solution à l'interface mal maîtrisée.



**FIGURE 6.16** – Carte du saut de déplacement tangentiel à l'interface de raccord de la plaque supérieure à convergence.

Cependant un avantage offert par l'utilisation de solveurs itératifs est de ne pas effectuer de calcul local complètement convergé au début des itérations globales/locales, dont on sait la solution imprécise. Cela permettrait d'éviter de coûteuses itérations locales inutilement trop précises. Mais soulève, à l'instar des solveurs Newton inexacts [Dembo *et al.*, 1982], des questions sur l'adaptabilité de la tolérance locale en fonction du résidu global de la stratégie global/local.

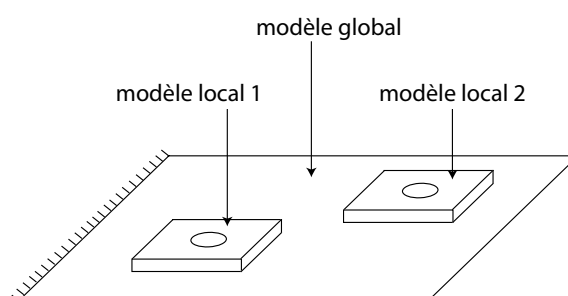
## 6.2 Traitement de plusieurs zones locales

Les structures industrielles et notamment les assemblages peuvent nécessiter un raffinement de modèle à de multiples endroits. Par exemple pour les liaisons boulonnées, chaque boulon peut être représenté par un modèle local indépendant. Cela revient donc à définir un problème couplé entre un modèle global et de plusieurs « patches » locaux.

Par l'analogie effectuée entre la stratégie développée et la méthode de Schwarz, la gestion de multiples zones locales ne soulève *a priori* pas de difficulté particulière, tant que ceux-ci ne se recouvrent pas. L'intérêt de cette sous-structuration est alors de résoudre

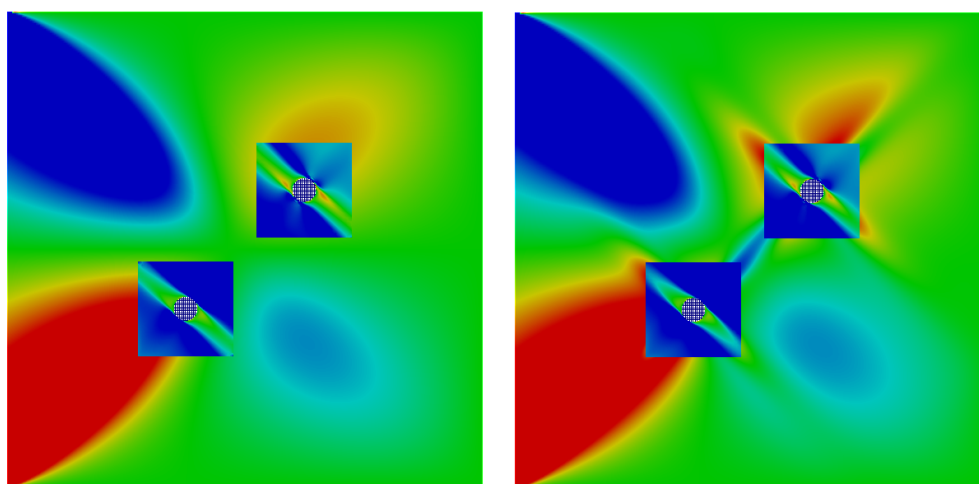
de façon simultanée les problèmes locaux : comme ils sont totalement indépendants les uns des autres, chaque solveur local est appelé indépendamment.

Un exemple d'une telle structure est présenté FIG. 6.17, une plaque trouée possédant deux trous est modélisée par un modèle plaque (sans trou) et deux zones locales définissant les trous.



**FIGURE 6.17** – Représentation d'un cas test avec plusieurs modèles locaux.

Les calculs locaux étant effectués en parallèle, l'ajout de patch influe seulement sur le temps nécessaire pour manipuler les données d'interfaces (lecture/écriture des résultats, calcul du résidu).



**FIGURE 6.18** – Effort généralisée  $N_{xy}$  et contraintes  $\sigma_{xy}$  : à gauche avant correction, à droite après 5 itérations globale/locale.

Sur la figure FIG. 6.18 sont représentées les contraintes avant et après correction pour le cas d'une plaque stratifiée<sup>3</sup> en traction. On peut y voir que le modèle global avant correction ne comporte aucune perturbation, alors que la solution globale après correction est modifiée et prend en compte les effets localisés provenant des trous. Il est également

3. On utilise le même empilement que défini dans le tableau 3.2.

possible d'observer une évolution de la solution locale entre la première descente et la solution convergée.

Par ailleurs, les effets dus à l'introduction des trous se propagent dans la solution globale et peuvent interagir entre patchs : dans la FIG. 6.18 on peut observer l'apparition d'une bande entre les deux patchs. Les premiers essais dans ce type de stratégie semblent indiquer que la distance entre les zones locales influe peu sur la convergence FIG.6.19a, mais qu'en général celle-ci est un peu plus lente que dans un cas avec une unique zone locale FIG. 6.19b.

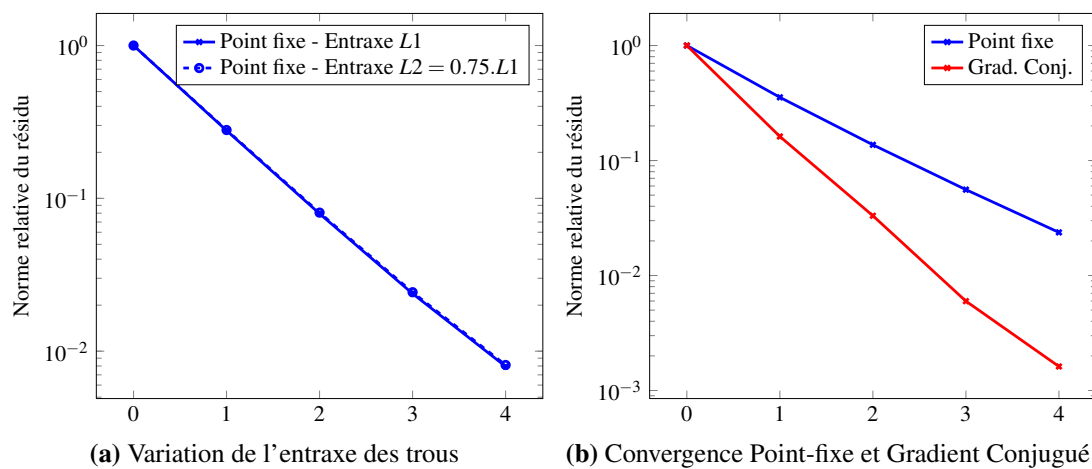


FIGURE 6.19 – Courbe de convergence sur l'exemple de la plaque avec deux trous.

Le traitement de zones locales multiples semble donc une extension naturelle de la méthode. Dans un cas linéaire, la distance entre les patchs ne semble pas avoir d'impact. Cependant, pour des modèles non-linéaires de nombreuses questions peuvent être soulevées et demandent des traitements particuliers. Par exemple, pour rester efficace dans les cas où un patch convergerait beaucoup plus vite ou plus lentement que les autres, où pour converger vers la bonne solution dans le cas où des patchs subiraient des adoucissements.

### 6.3 Limites et perspectives d'évolution de la stratégie non-intrusive

Malgré les développements apportés au relèvement et au raccord plaque/3D, certaines situations restent mal prises en compte. Les sections suivantes évoquent notamment la détermination du placement et de la validité du raccord, et d'autre part le traitement de maillages incompatibles.

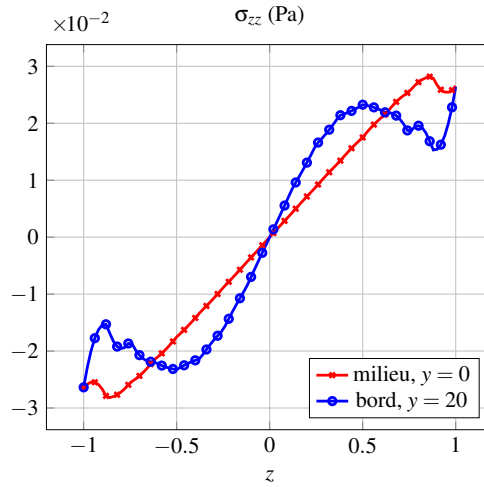
*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*



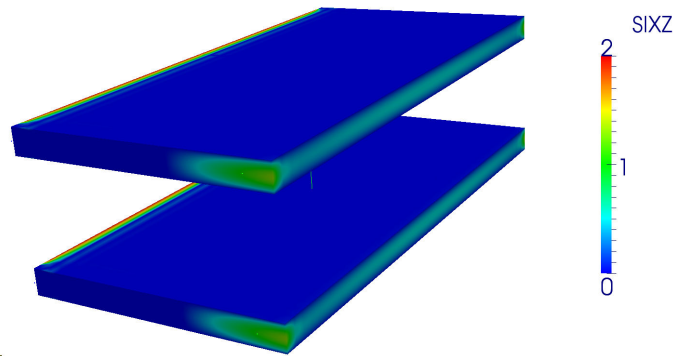
### 6.3.1 Cas de chargements mal pris en compte

#### 6.3.1.1 Cas des bords libres

Malheureusement le raccord développé ici ne se comporte pas de façon idéale dans toutes les situations. Le choix de ne pas considérer les solutions particulières liées aux bords libres provoque naturellement des effets artificiels lorsque l'interface de raccord débouche sur un bord libre. On peut observer sur la figure FIG.6.20b que ces effets de bord artificiel, générés par une mauvaise description du raccord au bord, ne sont pas atténués si l'on poursuit les itérations.



(a) Comparaison  $\sigma_{zz}$  sur le problème de bord libre



(b) Partie locale d'un problème de flexion : en bas avant itération, en haut après 5 itérations. Les effets de bord sont persistants au cours des itérations.

**FIGURE 6.20** – Illustration du problème de bords libre, en haut  $\sigma_{zz}$  au raccord, et en bas une vue du champ  $\sigma_{xz}$ .

La prise en compte de ces effets de bord demanderait d'identifier les solutions particulières aux bords, puis de les incorporer dans la définition du raccord. Cette approche est

complexe à mettre en œuvre, car les effets de bord dépendent eux-même du chargement. Une autre source de perturbation est la qualité de la solution plaque proche des bords, car il est connu que dans le modèle de Reissner-Mindlin, la solution plaque au bord est dépendante de la discrétisation.

Ainsi, une recommandation d'utilisation du raccord est d'éviter autant que possible d'avoir une interface débouchant sur un bord libre, au risque de voir apparaître le long des bords des solutions artificielles.

### 6.3.1.2 Cas du chargement surfacique

Une autre limitation du raccord est le cas où l'on a un chargement surfacique (sur les faces supérieure ou inférieure) à proximité de l'interface. Ce chargement n'est pas représenté par une solution de Saint-Venant tel que défini dans les problèmes-types de relèvements FIG. 3.1. La non prise en compte de ce chargement se traduit à l'interface par une incompatibilité des contraintes transverses  $\sigma_{zz}$ , représentée figure FIG. 6.21. On peut voir sur le graphe FIG. 6.21a que la contrainte transverse au bord de l'interface n'est pas du tout la même si l'on s'éloigne un peu de l'interface. On note que même si l'allure dans la section n'est pas la bonne, la valeur maximal de la contrainte transverse sur l'interface reste du même ordre de grandeur qu'à l'intérieur de plaque.

De la même façon que pour les bords libres, afin de prendre en compte ce chargement, il faudrait définir le relèvement correspondant. La difficulté est que ce chargement n'est pas directement représenté par un effort généralisé plaque. Il serait peut-être nécessaire d'introduire une théorie de plaque plus évoluée lors du relèvement.

### 6.3.2 Placement et validité du raccord

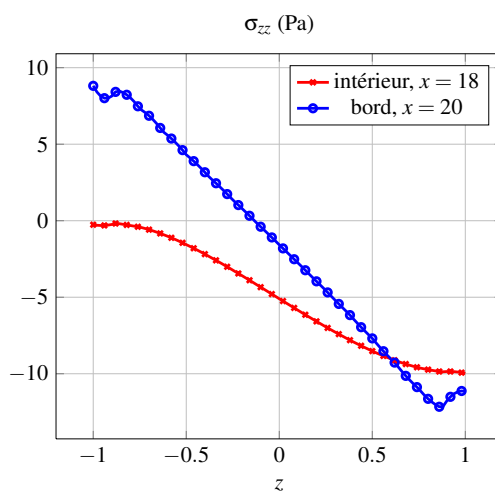
On a vu lors du développement du raccord, que celui-ci ne comporte pas de « paramètre de réglage ». On a cependant la liberté du choix de placement ainsi que de la taille de la « zone tampon ».

Si l'on doit choisir *a priori* un placement de la zone de raccord, deux sources de perturbations sont à prendre en compte :

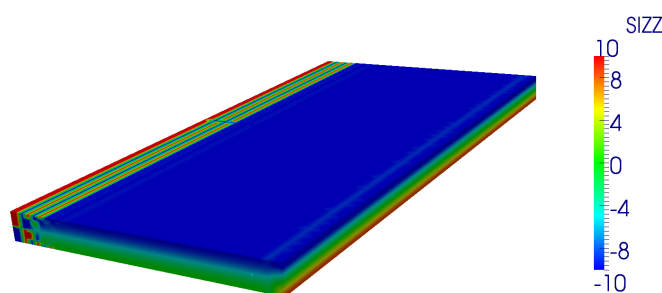
- les effets provenant du modèle global : effets de bord libre, chargements imposés,
- les effets provenant du modèle local : concentration de contraintes, phénomènes non-linéaires.

Pour la première catégorie, dans une plaque isotrope, les effets locaux sont en général de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque, on peut alors se servir de règles métier ou géométriques pour déterminer les endroits où appliquer un modèle réduit [Robinson *et al.*, 2011].

Cependant pour une plaque stratifiée, la pénétration des effets de bord dépend en plus de l'empilement et du chargement. Une certaine estimation pourrait être envisagée en observant la propagation des effets de bord dans les problèmes-types de relèvement nécessaires à la création du raccord (représentés figures FIG. 3.1).



(a) Comparaison  $\sigma_{zz}$  sur le problème à pression uniforme imposée



(b) Partie locale d'un problème avec chargement surfacique sur la face supérieure.

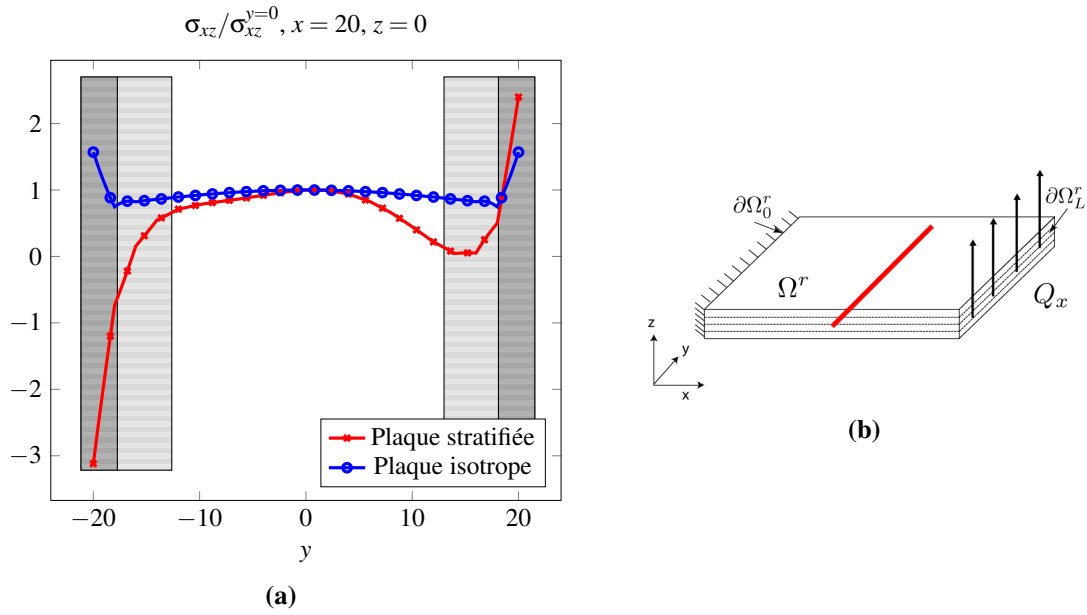
**FIGURE 6.21** – Illustration du cas de chargement à pression uniforme imposée.

Sur les figures FIG. 6.22, le problème-type de relèvement en flexion est repris. La plaque considérée a des côtés de 40 mm et une épaisseur de 2 mm. Les effets de bord libres sont plus importants et se propagent plus loin dans le cas d'une plaque stratifiée (zone grise claire), par rapport au cas isotrope (zone grise foncée).

Dans cet exemple, il est nécessaire de s'éloigner deux fois plus des bords pour retrouver une solution de Saint-Venant, information qu'il est intéressant de prendre en compte dans le raccord lors de son placement.

En dehors de ces considérations *a priori*, il semble important de posséder un indicateur au cours des itérations permettant de déterminer si le raccord est toujours bien placé vis-à-vis de l'évolution des non-linéarités locales par exemple.

Cependant la détermination de cet indicateur semble délicate. En effet, le mauvais placement de l'interface n'est pas toujours visible en observant la convergence de l'algorithme. Une illustration peut être donnée en reprenant le cas du couplage Code\_Aster/COFAST3D (dont le schéma est représenté FIG. 6.12) pour différentes tailles



**FIGURE 6.22** – Évolution de la contrainte de cisaillement dans le problème de relèvement en flexion. Les zones en grises sont les zones perturbées par les bords.

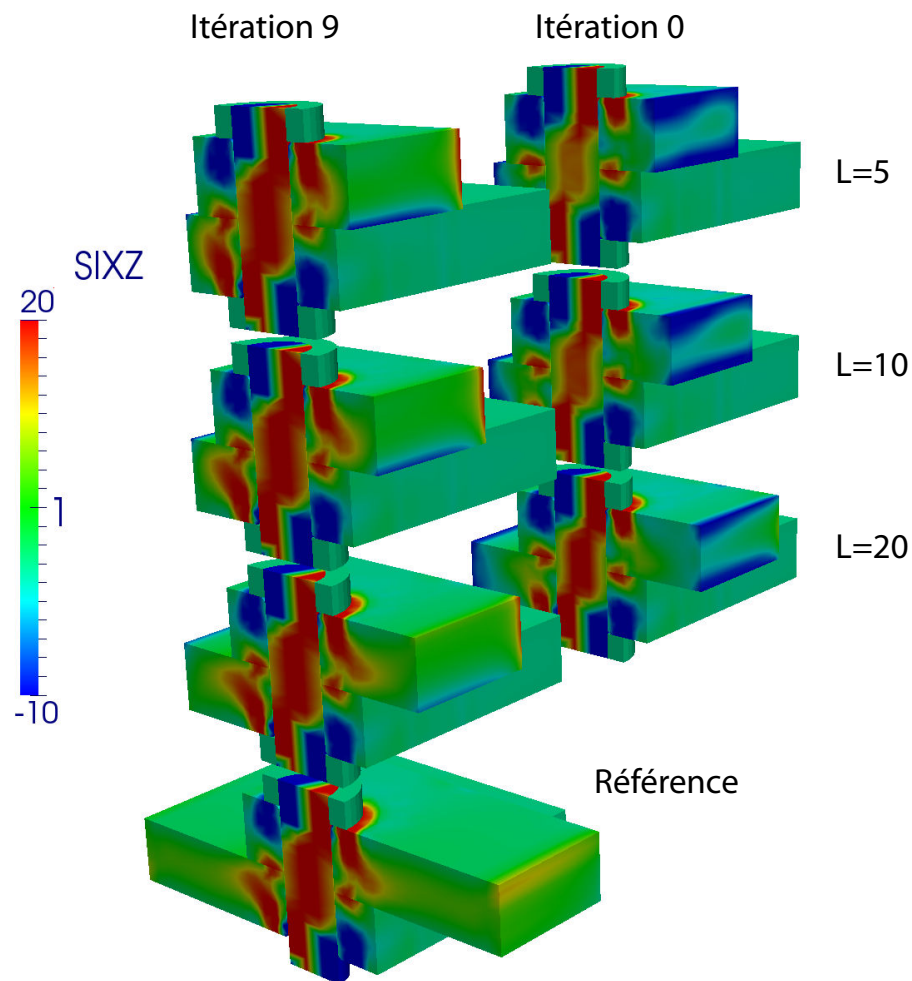
de la zone locale, en construisant différents problèmes locaux avec une interface de raccord plus ou moins éloignée de la zone de contact.

Les courbes de convergence obtenue pour les différents modèles locaux ne montrent pas de différence significative FIG. 6.24a, alors que la comparaison entre les contraintes locales à convergence et la solution de référence montre clairement que les solutions locales sont différentes FIG. 6.23. Plus l'interface de raccord est proche et plus la solution à convergence, autrement dit le résultat du modèle « hybride », est éloignée de la solution de référence.

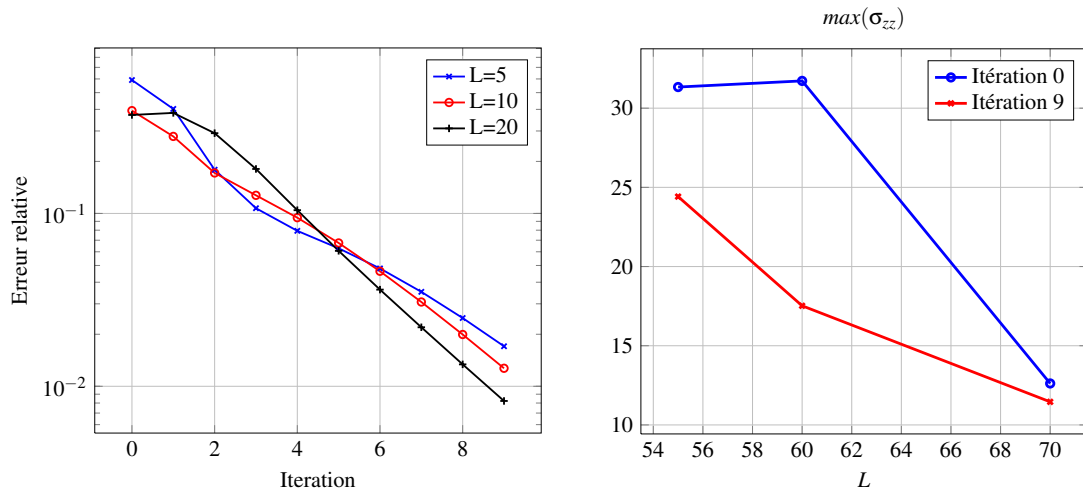
Si l'on observe les contraintes transverses par l'indicateur  $\max(\sigma_{zz})$  sur le bord du domaine local, on obtient le graphe de la figure FIG. 6.24b. En l'absence d'efforts surfaciques sur les faces supérieure et inférieure la contrainte transverse de référence est nulle. Les itérations permettent de diminuer cette composante, et l'éloignement de l'interface également.

Il est cependant difficile de généraliser cet indicateur à partir de ce simple cas. Par exemple, si l'on observe les contraintes transverses dans le problème avec bords libres FIG. 6.20a. On sait que la solution au bord est fautive, mais l'allure des contraintes transverses au bord et au centre de la plaque varie peu, et est de même amplitude.

Dans le cas où le raccord plaque/3D débouche sur un bord libre, on sait que la solution au bord est fautive et que des effets de bord viennent perturber la solution. Cependant, lorsque l'on regarde les contraintes transverses  $\sigma_{zz}$  à proximité du bord libre et au centre de la plaque FIG. 6.20a, on ne remarque pas de différence sur le maximum de cette contrainte, et assez peu dans son allure dans la section.



**FIGURE 6.23** – Comparaison des solutions locales obtenues sur la contraintes  $\sigma_{xz}$ , à droite avant itération, à gauche après convergence, et en bas la solution de référence.



(a) Courbe de convergence pour différentes tailles de modèle local.

(b) Évolution de l'indicateur d'erreur d'interface pour différents placements de l'interface.

**FIGURE 6.24** – Évolution du résidu et de la contrainte transverse en fonction du placement de l'interface.

Le même constat peut être fait lors de l'application d'un chargement surfacique FIG. 6.21a, la solution au raccord est fautive, mais le maximum des contraintes transverses est identique entre l'extraction de la solution à l'interface, et l'extraction à l'intérieur du modèle 3D.

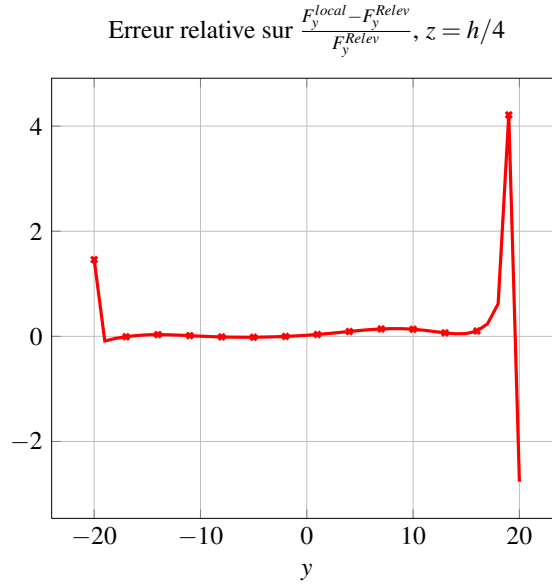
Ainsi, établir un indicateur basé sur la contrainte transverse n'est pas une tâche simple, car le maximum n'est pas toujours la quantité la plus représentative.

Une autre approche pour évaluer la qualité de l'interface, est d'effectuer une reconstruction 3D de la solution plaque et de la comparer aux efforts locaux. Pour cela, on peut utiliser le relèvement numérique en effort construit lors de la préparation du couplage 4.1.1.

Une application de cette méthode est représentée sur la figure FIG. 6.25, pour le cas du raccord débouchant sur un bord libre dans le cas d'un stratifié orthotrope. On observe effectivement un écart important au bord, mais cet écart est rapidement atténué à l'intérieur de la plaque. On ne distingue pas clairement la zone de pénétration des effets de bord, ce qui rend cet indicateur difficilement exploitable.

Pour conclure, le résidu est un bon indicateur de convergence de la stratégie global/local, en revanche les outils développés pour nous renseigner sur la qualité du raccord et la qualité du modèle couplé vis-à-vis du calcul de référence ne sont pas concluants.

Le développement d'un indicateur fiable permettant de déterminer le placement du raccord, ainsi qu'une estimation de la largeur nécessaire à la « zone tampon », permettrait de simplifier et guider la création de modèles locaux. Cela donnerait également une certaine assurance sur la qualité du modèle couplé ainsi formé.



**FIGURE 6.25** – Évolution de l’erreur relative sur les forces nodales  $F_y$  le long de l’interface de correction  $\Gamma_I$ , pour un empilement orthotrope.

### 6.3.3 Traitement de maillages incompatibles

Une dernière amélioration du couplage est le traitement de maillages non-compatibles. En effet, dans la version actuelle du couplage, les maillages utilisés sont compatibles aux interfaces, ce qui est une contrainte relativement importante lors de leur génération.

Cette limitation provient notamment de la difficulté à évaluer les contraintes locales le long d’une interface quelconque. Pour le modèle global, comme la technique non-intrusive génère une discontinuité de contrainte ( $\delta$ ), si l’on veut continuer à modéliser ce saut par l’introduction de forces nodales, il est nécessaire de positionner l’interface sur le bord d’éléments globaux.

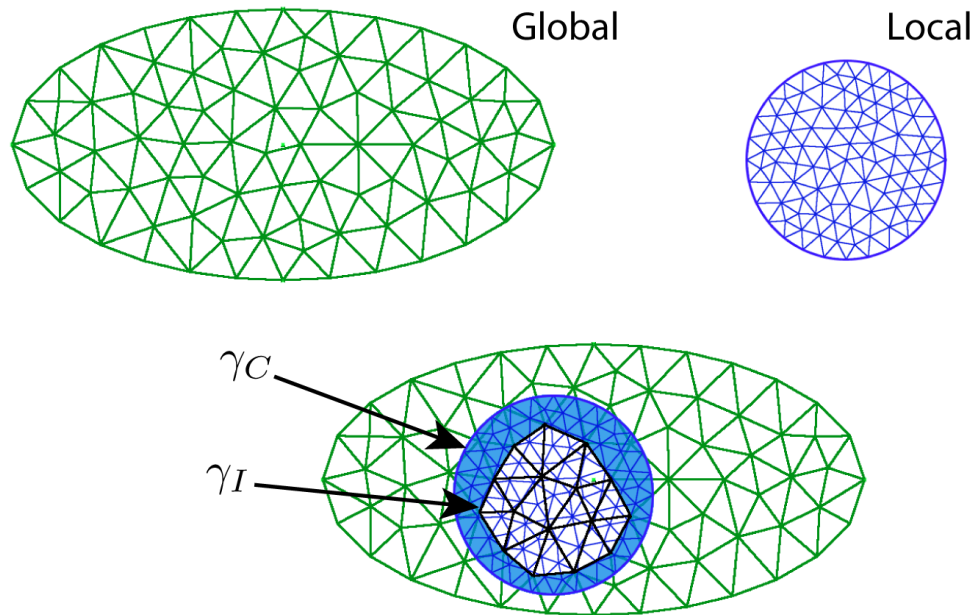
Comme on a pu observer que l’utilisation d’une « bande tampon » n’impactait ni la performance de la méthode, ni la formulation générale de la stratégie. Il serait pratique de se servir de cette bande pour traiter le cas de maillages incompatibles, voir FIG. 6.26.

La zone tampon représentée en bleu sur le schéma FIG. 6.26 est une bande fictive entre l’interface représentée par le bord du domaine local et une interface composée du bord des éléments globaux strictement inclus dans le modèle local (en noir). De cette façon, les déplacements à appliquer sur le modèle local utilisent une interpolation à partir des déplacements globaux ; afin d’évaluer les forces nodales de correction, le principal problème réside dans le calcul des forces nodales locales sur l’interface globale  $\gamma^C$ .

Le travail défini sur l’interface de correction  $\gamma^C$  est :

$$\sum_{\gamma^C} \mathbb{F}^L \mathbf{U}_{2D}^L = \int_{\gamma^C} \int_z \underline{\underline{\sigma}}^L \cdot \underline{\underline{n}} \Phi^G \underline{\underline{U}}_{3D}^L ds \quad (6.1)$$

Cette technique nécessite de connaître le champ de contrainte locale en tout point. Or



**FIGURE 6.26** – Représentation d'un cas de maillage incompatible. La zone bleu représente la zone tampon entre les interfaces  $\gamma_C$  et  $\gamma_I$ .

les champs de contraintes ne sont pas statiquement admissibles à l'intérieur des éléments, cette approche nécessite donc des techniques de reconstruction de champs.

Une approche moins intrusive pourrait être d'utiliser un maillage de « transition » 3D, généré à partir des données de l'interface de correction et qui serait utilisé pour projeter le champ de contraintes locales à l'intérieur FIG. 6.27.

Le Code\_Aster dispose d'outils pour « interpoler » les points de Gauss d'un maillage dans un autre maillage (PROJ\_CHAMP () et mot-clé ECLA\_PG).

En projetant ainsi le champ de contrainte de  $\Omega_I$  dans  $\Omega_{proj}$ , les fonctions de formes et techniques développées sont alors identiques au cas de maillages compatibles. Cependant la projection d'un champ d'un maillage à un autre n'est pas exacte et peut entraîner des erreurs au raccord.

Sur la figure FIG. 6.28 est représentée une illustration de cette méthode dans le cas d'une plaque en flexion. Les contraintes de la solution locale sont transférées sur le maillage de transition, créé à partir de l'interface de correction dans le modèle global  $\gamma_I$ .

De cette façon, l'obtention des forces nodales locales est directe. Cependant de nombreux développements sont encore nécessaires :

- sur la création robuste d'un maillage de transition,
- sur l'interpolation des degrés de liberté plaque vers le modèle local, car l'utilisation de fonctions de formes linéaires n'est pas suffisant pour les champs de déplacement plaque (utilisation de splines cubiques, [Ransom et Knight Jr, 1990])
- sur l'estimation de l'erreur introduite en transférant le champ de contrainte d'un



maillage sur un autre.

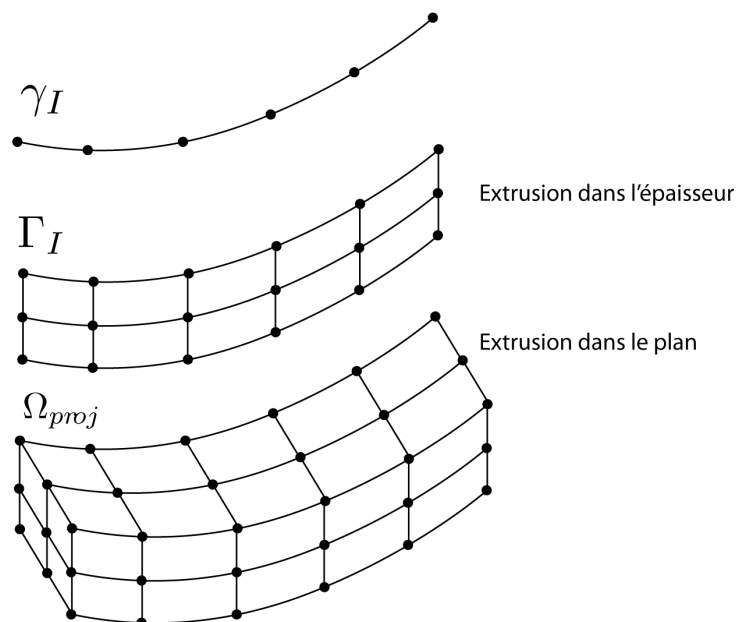


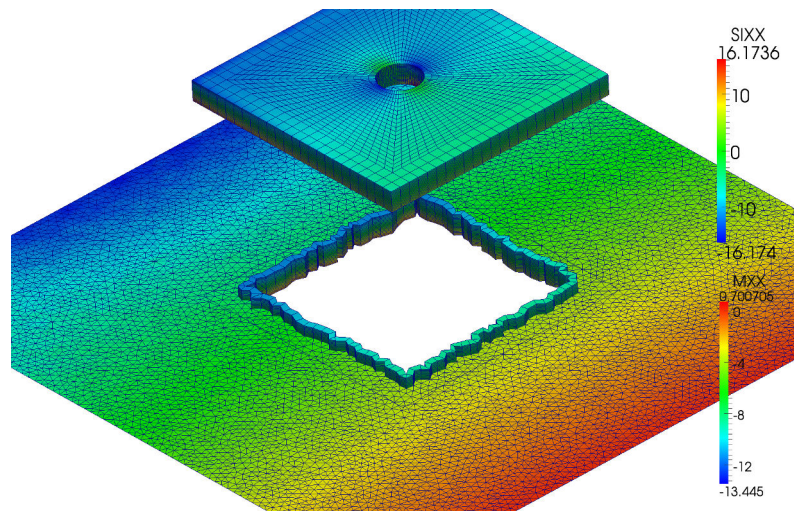
FIGURE 6.27 – Création d'un maillage où projeter le champ de contrainte local.

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la stratégie développée a été appliquée à des cas plus complexes, et notamment à des cas d'assemblages, avec ou sans contact. En présence de non-linéarités, on ne bénéficie pas des mêmes techniques d'accélération de convergence que dans le cas linéaire. Cependant il a été montré que l'on pouvait facilement remplacer un solveur par un autre, ici avec le couplage Code\_Aster/ COFAST3D. L'utilisation de solveurs dédiés et optimisés permet un gain de temps important, ici le passage de plusieurs heures à quelques minutes pour chaque itération.

Les limites de la stratégie développée résident principalement dans le relèvement effectué, qui restreint le placement du raccord aux zones où la solution de Saint-Venant s'applique, c'est-à-dire loin des bords, et sans efforts surfaciques.

En ce qui concerne les futurs développements possibles de la stratégie, ceux-ci concernent principalement le développement d'outils permettant d'estimer la qualité de l'interface, *a priori* ou *a posteriori* au cours des itérations. Le traitement de multiples zones locales ne semble pas poser de difficulté particulière et s'intègre bien dans la méthode formulée comme une méthode de Schwarz. Les modèles locaux étant traités de façon totalement indépendante, cette méthode permet un gain de temps conséquent par rapport à un calcul 3D.



**FIGURE 6.28** – Exemple sur une plaque isotrope en flexion. En haut, la contrainte  $\sigma_{xx}$  local. En bas, l'effort  $M_{xx}$  avec en superposition le maillage de transition sur lequel est interpolé les contraintes locales.

Une dernière question abordée est le traitement de maillages incompatibles. Cette approche est particulièrement intéressante dans le cas où les maillages manipulés proviennent de sources différentes et ne possèdent pas de noeuds communs. La formulation avec recouvrement par « zone tampon » et la création d'un maillage de transition permet de se libérer de cette contrainte.



# Conclusion

Les techniques non-intrusives pour le couplage de codes commerciaux généralistes avec des codes dédiés connaissent actuellement un grand essor. Leur objectif est d'étendre les possibilités de calcul des industriels en terme de complexité et de qualité sans altérer leurs pratiques de travail.

Cette thèse a visé à apporter des réponses à une problématique importante en vue de l'adoption de ces méthodes pour des cas de l'industrie, notamment aéronautique : la possibilité de traiter des modèles globaux à base de plaques, coques, connecteurs, et de les enrichir à l'aide de modèles 3D aux endroits où ceux-ci s'avèrent indispensables : près des bords, des zones endommagées, des liaisons.

Afin de s'appuyer sur les travaux précédents, le choix retenu a été de mettre en place des techniques de relèvement 3D des champs plaques. Pour conserver la généralité et la simplicité de la méthode, une démarche purement numérique a été retenue qui s'adapte aux empilements et éléments finis utilisés. Un calcul préalable permet d'associer des distributions dans l'épaisseur de déplacement et contrainte 3D à des chargements de Saint-Venant.

Plusieurs approches ont été proposées pour exploiter ces relèvements et définir des conditions limites 3D aux problèmes locaux. Si l'approche par travail équivalent est séduisante, elle se heurte à de nombreuses difficultés pratiques : dépendance à l'orientation de l'interface, problème du choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange, et finalement performance en deçà de celles des conditions limites de Dirichlet construites à partir du déplacement plaque et des gauchissements pré-calculés.

Cette thèse a également été l'occasion d'étudier la technique de couplage non-intrusif, d'enrichir sa compréhension et d'améliorer ses performances.

Fondamentalement la méthode, initialement interprétée comme un algorithme de point fixe ou un Newton modifié, a été comprise comme une méthode de Schwarz optimisée alternée sans recouvrement. On en déduit la possibilité d'introduire un recouvrement dans les modèles. Cette option s'avère utile pour atténuer les effets de bords artificiels générés par les conditions limites imposées sur le modèle 3D ; elle permet également de proposer un traitement relativement simple et généraliste des maillages incompatibles. On en déduit également la possibilité, dans le cas de problèmes linéaires, d'utiliser une accélération Krylov, ici un gradient conjugué dont la convergence inconditionnelle est bien plus rapide que celle de l'algorithme de base.

Plus mécaniquement, la méthode s'interprète comme la recherche d'une discontinuité

de contrainte dans le modèle global (appliquée via un chargement sur l'interface) représentatif de l'écart entre le modèle local fin et sa représentation grossière. Cette analyse conduit à comprendre la méthode comme le préconditionnement à droite du problème de référence (qui n'est jamais créé et encore moins résolu). Elle montre également l'importance d'appuyer l'étape de remontée sur des bords d'éléments du maillage grossier.

Dans cette thèse, le problème cible est celui des assemblages boulonnés de plaques composites. La technique de couplage est utilisée pour virtuellement substituer les connecteurs grossiers définis au niveau global par des calculs locaux non-linéaires représentatifs de la liaison.

Lorsqu'on introduit les phénomènes de contact dans les modèles 3D, les problèmes deviennent rapidement très lourds et la méthode non-intrusive montre alors l'avantage d'être indépendante vis-à-vis des solveurs utilisés. Un couplage Code\_Aster/COFAST3D a ainsi pu être mis rapidement en place pour traiter des cas un peu plus complexes d'assemblage avec prise en compte de contact.

Si la méthode s'est avérée efficace sur de nombreux cas, y compris à plusieurs patches, des limitations sont apparues au cours de cette étude : le raccord basé sur les solutions de Saint-Venant ne permet pas de traiter précisément les bords ou les chargements de pression sur les faces de la plaque. Dans ce cas là la méthode peut converger (au sens de la décroissance du résidu) vers une solution physiquement non-acceptable. Un premier indicateur de qualité du modèle convergé a été proposé à partir de l'analyse de la contrainte hors-plan, sa pertinence n'est pas encore totalement établie.

On dégage donc de nombreuses perspectives à cette thèse dans l'objectif d'aller encore plus vers les problématiques des industriels. Tout d'abord il est nécessaire d'accroître le domaine de validité de la méthode en étant capable de mieux prendre en compte les bords et les chargements sur les faces des plaques. S'il est relativement facile d'augmenter le nombre de problèmes préalables à résoudre et d'enrichir la base des relèvements de Saint-Venant, la question de la détermination précise des contributions de chaque terme à partir de la solution plaque ne semble pas évidente à traiter. En tout état de cause, la méthode gagnerait à intégrer un indicateur fiable de la qualité de la modélisation hybride plaque/3D. Par ailleurs, des éléments mis en œuvre dans cette thèse et dans des travaux précédents méritent d'être plus poussés avant, comme le traitement des maillages incompatibles, la mise en œuvre parallèle des calculs avec en vue des applications avec de très nombreux patches, l'utilisation de conditions limites de Robin bien choisies sur les problèmes locaux, le traitement des comportements non-linéaires globaux et des phénomènes adoucissants.

## Annexe A

# Calcul de la rigidité apparente pour le modèle réduit

À travers la réduction de modèle, il faut s'assurer que les propriétés matériaux des deux modèles sont équivalente. C'est pourquoi ici on calcule le module de Young  $EI_z = \langle z^2 \mathbb{K}_{cp}^{2D} \rangle$  pour le modèle poutre.

On obtient le module de Young apparent dans la poutre en inversant la matrice de la loi de comportement orthotrope écrite en 2D, en se plaçant dans le repère d'orthotropie.

$$\varepsilon_{2D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{2D} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E_1^3 E_2}{E_1^2 - E_1 E_2 \nu_{12}^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_{12}}{E_1} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Pour le cisaillement, on a toujours  $\sigma_{xz} = 2G_{12}\varepsilon_{xz}$ .

On prend comme raideur plane apparente le premier terme de la matrice, on a :

$$K_{cp}^{2D} = \frac{E_1^3}{E_1^2 - E_1 E_2 \nu_{12}^2} \quad (\text{A.3})$$

Si on est dans le cas d'un empilement de plis orthotropes d'orientations différentes, il y a un module apparent pour chaque pli. On effectue alors une homogénéisation dans la section :

$$K_{cp}^{2D(i)} = \frac{E_1^{(i)^3}}{E_1^{(i)^2} - E_1^{(i)} E_2^{(i)} \nu_{12}^2} \quad (\text{A.4})$$

$$K_{cp}^{2D} I_y = \langle z^2 \mathbb{K}_{cp}^{2D} \rangle = \sum_{i=1}^N K_{cp}^{2D(i)} \frac{y_{max}^{(i)^3} - y_{min}^{(i)^3}}{3} b \quad (\text{A.5})$$

Le modèle plaque est alors calculé avec cette définition du module de Young et moment d'inertie de la section.

Dans d'un domaine uniquement homogène isotrope, en simplifiant les expressions on a :

$$K_{cp}^{2D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\nu_{xz} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi en entrant ces modules modifiés dans le modèle poutre (plaque en ramener en 1D), on assure la cohérence de ces modèles, pour qu'ils représentent bien la même plaque 3D.

## Annexe B

# Calcul des forces nodales entre le modèle plaque et le modèle 3D

Afin de calculer l'étape de correction en effort, il est nécessaire de trouver les forces nodales de correction à appliquer au modèle plaque. Dans la stratégie de L. Gendre, les modèles sont équivalents en dimension et les maillages compatibles, les forces nodales de corrections sont calculées en comparant noeud à noeud les forces du domaine local et du domaine global. Dans le cadre de notre raccord entre des domaines de dimensions différentes on doit effectuer un post-traitement des forces nodales locales, de façon à ce qu'elles soient cohérentes avec les forces nodales globales. On peut présenter deux cas :

- une maille 3D linéaire (HEXA8) en vis-à-vis d'une maille 2D plaque (QUA4)
- une maille 3D quadratique (HEXA20) en vis-à-vis de 2 mailles plaque (QUA4)

### B.1 Lien chargements/forces nodales

Le fait de manipuler à l'interface d'un côté des forces nodales 3D, et de l'autre des forces nodales généralisées plaque nécessite quelques explications. On part du principe que les forces nodales sont directement issues du calcul, il n'y a donc pas d'hypothèse d'extrapolation de contrainte aux nœuds, ou de lissage effectué par le post-traitement des résultats. De plus les forces nodales sont directement données dans le repère global. On évite ainsi de prendre en compte l'orientation de la face sur laquelle se trouve le nœud, et la prise en compte de coin s'effectue naturellement.

D'un côté les forces nodales peuvent se calculer à partir d'un chargement appliqué à une face, à partir des fonctions de forme élément fini.

$$[F] = \int_K [N_u]^T p \quad (B.1)$$

avec  $[N_u]$  la matrice d'interpolation et  $p$  le chargement représenté par une pression ou un chargement surfacique.

D'un autre côté à l'issue du calcul, on a les contraintes au point de Gauss. La procédure implémentée dans le Code\_Aster permettant la reconstruction des forces nodales est la



suivante :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u) d\Omega = \sum_K \int_K \boldsymbol{\sigma}^K \boldsymbol{\varepsilon}(u_K) dK = \sum_K \int_K \boldsymbol{\sigma}^K \mathbb{B} u_K dK = \sum_K F_K u_K \quad (\text{B.2})$$

Où  $\Omega$  est un volume d'où l'on veut extraire les forces nodales.  $K$  représente les éléments constituant le volume  $\Omega$ .  $\boldsymbol{\sigma}^K$  sont les contraintes au point de Gauss,  $\mathbb{B}$  l'opérateur élément fini des déformations,  $u_K$  le déplacement élémentaire, et avec :

$$[F] = \int_K \mathbb{B}^T \boldsymbol{\sigma}^K dK \quad (\text{B.3})$$

Il y a équivalence entre les deux approches car les éléments finis sont isoparamétriques et basés sur la partition de l'unité.

$$\sum_K \int_K [N_u]^T dK = 1 \quad (\text{B.4})$$

On reconstruit ainsi la résultante et le moment sur une face à partir des forces nodales relevées sur cette face.

### B.1.1 Cas linéaire

Afin de simplifier, on considère une unique maille HEXA8 en vis-à-vis de la maille QUA4. Sur l'interface la maille HEXA8 est représentée par une maille QUA4 de hauteur  $h$  et de largeur  $L$  et la maille QUA4 par un segment à 2 noeuds et de longueur  $L$ .

Soit  $\phi_i^{3D}$  avec  $i = [1..4]$  les fonctions de formes de la maille de QUA4.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i^{3D} dydz = \frac{hL}{4} \quad (\text{B.5})$$

Si on suppose un chargement de pression unitaire sur la maille, alors :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} p dydz = \sum_{i=1}^4 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i^{3D} dydz = hL \quad (\text{B.6})$$

On considère des groupes de noeuds 3D en vis-à-vis des noeuds plaque, on regroupe les noeuds N1, N4 et N2, N3 on peut alors exprimer leurs sommes respectives :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} p dydz = S_1 + S_2 = hL \quad (\text{B.7})$$

$$S_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_1^{3D} + \phi_4^{3D} dydz = \frac{hL}{2} \quad (\text{B.8})$$

$$S_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_2^{3D} + \phi_3^{3D} dydz = \frac{hL}{2} \quad (\text{B.9})$$

Du côté de la plaque on considère les fonctions de forme  $\phi_j^g$  avec  $j = [1, 2]$  définies sur les deux nœuds :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \phi_j^g dydz = \frac{L}{2} \quad (\text{B.10})$$

on considère la même pression unitaire que pour le côté local, on doit donc appliquer un facteur  $h$  correspondant à l'épaisseur de la plaque, d'où :

$$\int_{-L/2}^{L/2} p^g dy = \int_{-L/2}^{L/2} hp dy = h \int_{-L/2}^{L/2} \phi_1^g + \phi_2^g dy = hL \quad (\text{B.11})$$

La force nodale au nœud N1 est donc :

$$F_1 = h \int_{-L/2}^{L/2} \phi_1^g dy = h \int_{-L/2}^{L/2} \phi_2^g dy = S_1 = S_2 = \frac{hL}{2} \quad (\text{B.12})$$

Ainsi dans le cas linéaire, on peut directement relier la somme des groupes de nœuds de la partie locale, aux forces nodales de la modélisation plaque. Même dans le cas où il y a plusieurs éléments dans la longueur, l'assemblage des forces s'effectue de la même façon des deux côtés.

### B.1.2 Cas quadratique

De la même façon, on simplifie le problème à une maille HEXA20 pour 2 mailles QUA4. Sur l'interface, on a alors un QUA8 de hauteur  $h$  pour 2 éléments (linéaire) dans la largeur  $L = 2l$ .

Soit  $\phi_i^{3D}$  les fonctions de forme de la maille de QUA8.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i^{3D} dydz = -\frac{hL}{12} \quad \text{pour } i = [1..4] \quad (\text{B.13})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i^{3D} dydz = \frac{hL}{3} \quad \text{pour } i = [5..8] \quad (\text{B.14})$$

Si on suppose un champ de pression uniforme dans la maille on a :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} p dydz = \sum_{i=1}^8 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i^{3D} dydz = hL \quad (\text{B.15})$$

De la même façon on décompose les contributions en regroupant les fonctions de forme des nœuds sur une même colonne. On a alors :

*Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour la simulation des assemblages de plaques composites stratifiées.*

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} p \, dydz = S_1 + S_2 + S_3 = hL \quad (\text{B.16})$$

$$S_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_1^{3D} + \phi_4^{3D} + \phi_8^{3D} \, dydz = \frac{hL}{3} \quad (\text{B.17})$$

$$S_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_5^{3D} + \phi_7^{3D} \, dydz = \frac{2hL}{3} \quad (\text{B.18})$$

$$S_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_2^{3D} + \phi_3^{3D} + \phi_6^{3D} \, dydz = \frac{hL}{3} \quad (\text{B.19})$$

Du côté de la plaque, on reprend les résultats de la section précédente :

$$\int_{-l/2}^{l/2} \phi_j^g \, dydz = \frac{l}{2} \quad (\text{B.20})$$

Les forces nodales aux nœuds N1 et N2 sont donc :

$$F_1 = h \int_{-l/2}^{l/2} \phi_1^g \, dy = \frac{hl}{2} = \frac{3S_1}{4} \quad (\text{B.21})$$

$$F_2 = h \int_{-l/2}^{l/2} \phi_2^g \, dy = hl = \frac{3S_2}{4} \quad (\text{B.22})$$

A présent dans le cas où il y a plusieurs éléments assemblés dans la longueur, on a  $2S_1 = S_3$ . On a donc suivant les situations du nœud (bord/milieu/assemblé) des facteurs différents à appliquer :

$$F_1 = \frac{hl}{2} = \frac{3S_1}{4} \quad (\text{B.23})$$

$$F_2 = hl = \frac{3S_2}{4} \quad (\text{B.24})$$

$$F_3 = hl = \frac{3S_3}{2} \quad (\text{B.25})$$

# Bibliographie

- [Allix, 1989] ALLIX, O. (1989). *Modélisation du comportement des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie-1989.
- [Allix *et al.*, 2006] ALLIX, O., BARANGER, E. et BLANCHARD, L. (2006). An efficient strategy for the calculation of end effects on composite pipes : The thermoelastic case. *Composite Structures*, 76(4):291–302.
- [Allix et Dupleix-Couderc, 2009] ALLIX, O. et DUPLEIX-COUDERC, C. (2009). A plate theory as a mean to compute precise 3D solutions including edge effects and related issues. *NA*.
- [Amini *et al.*, 2009] AMINI, A. M., DUREISSEIX, D. et CARTRAUD, P. (2009). Multi-scale domain decomposition method for large-scale structural analysis with a zooming technique : Application to plate assembly. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(4):417–443.
- [Auricchio *et al.*, 2010] AURICCHIO, F., BALDUZZI, G. et LOVADINA, C. (2010). A new modeling approach for planar beams : finite-element solutions based on mixed variational derivations. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5(5):771–794.
- [Auricchio et Sacco, 1999] AURICCHIO, F. et SACCO, E. (1999). A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(10):1481–1504.
- [Auricchio et Sacco, 2003] AURICCHIO, F. et SACCO, E. (2003). Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates. *Journal of applied mechanics*, 70:381.
- [Babuska et Andersson, 2005] BABUSKA, I. et ANDERSSON, B. (2005). The splitting method as a tool for multiple damage analysis. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):1114–1145.
- [Badea, 1991] BADEA, L. (1991). On the schwarz alternating method with more than two subdomains for nonlinear monotone problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1):179–204.
- [Baranger *et al.*, 2005] BARANGER, E., ALLIX, O., BLANCHARD, L. *et al.* (2005). Une stratégie de calcul pour l'analyse de l'endommagement dans les tubes composites. In *JNC 14-14es Journées Nationales sur les Composites*, pages 709–718.

- [Batoz et Dhatt, 1990] BATOZ, J. et DHATT, G. (1990). Moderation des structures par éléments finis, Volume 2 : poutres et plaques. *Paris : Hermes*.
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 326(12):899–904.
- [Bernardi, 1994] BERNARDI, C. (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*.
- [Berveiller et al., 2006] BERVEILLER, M., SUDRET, B. et LEMAIRE, M. (2006). Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3):81–92.
- [Bettinotti et al., 2013] BETTINOTTI, O., ALLIX, O. et MALHERBE, B. (2013). A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics. *Computational Mechanics*, pages 1–14.
- [Blanco et al., 2008] BLANCO, P., FEIJÓO, R. et URQUIZA, S. (2008). A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(17–18):1577–1602.
- [Buannic et Cartraud, 2001] BUANNIC, N. et CARTRAUD, P. (2001). Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40):7163–7180.
- [Caron et al., 2006] CARON, J., DIAZ DIAZ, A., CARREIRA, R., CHABOT, A. et EHRLACHER, A. (2006). Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites science and technology*, 66(6):755–765.
- [Caron et Sab, 2001] CARON, J.-F. et SAB, K. (2001). Un nouveau modèle de plaque multicouche épaisse. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series {IIB} - Mechanics*, 329(8):595 – 600.
- [Carrera, 2000] CARRERA, E. (2000). A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 48(4):245–260.
- [Carrera, 2002] CARRERA, E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2):87–140.
- [Carrera, 2003] CARRERA, E. (2003). Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied mechanics reviews*, 56:287.
- [Carrera et Demasi, 2002] CARRERA, E. et DEMASI, L. (2002). Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1 : Derivation of finite element matrices. *International journal for numerical methods in engineering*, 55(2): 191–231.

- [Champaney *et al.*, 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263.
- [Chevreuil *et al.*, 2013] CHEVREUIL, M., NOUY, A. et SAFATLY, E. (2013). A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255(0):255 – 274.
- [Choi et Horgan, 1978] CHOI, I. et HORGAN, C. (1978). Saint-Venant end effects for plane deformation of sandwich strips. *International Journal of Solids and Structures*, 14(3):187 – 195.
- [Ciarlet et Destuynder, 1979] CIARLET, P. G. et DESTUYNDER, P. (1979). A justification of a nonlinear model in plate theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17–18, Part 1(0):227 – 258.
- [Cormier *et al.*, 1999] CORMIER, N. G., SMALLWOOD, B. S., SINCLAIR, G. B. et MEDA, G. (1999). Aggressive submodelling of stress concentrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(6):889–909.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Non-linear localization strategies for domain decomposition methods : application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8): 1436–1446.
- [Daghia *et al.*, 2008] DAGHIA, F., de MIRANDA, S., UBERTINI, F. et VIOLA, E. (2008). A hybrid stress approach for laminated composite plates within the first-order shear deformation theory. *International Journal of Solids and Structures*, 45(6):1766–1787.
- [Daniel, 1967] DANIEL, J. (1967). Convergence of the conjugate gradient method with computationally convenient modifications. *Numerische Mathematik*, 10(2):125–131.
- [Demasi, 2005] DEMASI, L. (2005). Refined multilayered plate elements based on murakami zig-zag functions. *Composite structures*, 70(3):308–316.
- [Demasi, 2006] DEMASI, L. (2006). Treatment of stress variables in advanced multilayered plate elements based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem. *Computers & Structures*, 84(19–20):1215–1221.
- [Dembo *et al.*, 1982] DEMBO, R., EISENSTAT, S. et T., S. (1982). Inexact newton methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(2):400–408.
- [Destuynder et Salaun, 1995] DESTUYNDER, P. et SALAUN, M. (1995). A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions part 1. the mixed variational formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 120(3–4):195 – 217.

- [Dhia *et al.*, ] DHIA, H. B., DURAND, C. et RATEAU, G. Partition 3D/coque par la méthode arlequin. *In Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structure-Giens*, pages 307–314.
- [Diaz *et al.*, 2007] DIAZ, A., CARON, J.-F. et EHRLACHER, A. (2007). Analytical determination of the modes I, II and III energy release rates in a delaminated laminate and validation of a delamination criterion. *Composite Structures*, 78(3):424–432.
- [Donaghy *et al.*, 2000] DONAGHY, R. J., ARMSTRONG, C. G. et PRICE, M. A. (2000). Dimensional reduction of surface models for analysis. *Engineering with Computers*, 16(1):24–35.
- [Donaghy *et al.*, 1996] DONAGHY, R. J., CUNE, W. M., BRIDGETT, S. J., ARMSTRONG, C. G., ROBINSON, D. J., MCKEAG, R. M., ROBINSON, D. et M, R. (1996). *Dimensional Reduction of Analysis Models*.
- [Dumontet, 1986] DUMONTET, H. (1986). Study of a boundary-layer problem in elastic composite-materials. *Rairo-Mathematical modelling and numerical analysis - modélisation mathématique et analyse numérique*, 20(2):265–286.
- [Düster *et al.*, 2007] DÜSTER, A., NIGGL, A. et RANK, E. (2007). Applying the hp-d version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37-40):3524 – 3533.
- [Düster *et al.*, 2007] DÜSTER, A., SCHOLZ, D. et RANK, E. (2007). *pq*-adaptive solid finite elements for three-dimensional plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(1):243–254.
- [El Fatmi et Zenzri, 2002] EL FATMI, R. et ZENZRI, H. (2002). On the structural behavior and the Saint Venant solution in the exact beam theory : Application to laminated composite beams. *Computers & Structures*, 80(16-17):1441–1456.
- [El Fatmi et Zenzri, 2004] EL FATMI, R. et ZENZRI, H. (2004). A numerical method for the exact elastic beam theory. applications to homogeneous and composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9-10):2521–2537.
- [Elkhodja *et al.*, 2007] ELKHODJA, N., BEN DHIA, H., ROUX, F.-X. *et al.* (2007). Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre arlequin et approches par sous-domaines. *In Actes du huitieme colloque national en calcul des structures, Giens, France*, volume 1, pages 467–472.
- [Erkmen, 2012] ERKMEN, R. (2012). Bridging multi-scale approach to consider the effects of local deformations in the analysis of thin-walled members. *Computational Mechanics*, page 1–15.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000).  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183(3):309–330.

- [Fish *et al.*, 1997] FISH, J., SUVOROV, A. et BELSKY, V. (1997). Hierarchical composite grid method for global-local analysis of laminated composite shells. *Applied numerical mathematics*, 23(2):241–258.
- [Fletcher et Reeves, 1964] FLETCHER, R. et REEVES, C. M. (1964). Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 7(2):149–154.
- [Fortin et Brezzi, 1991] FORTIN, M. et BREZZI, F. (1991). Mixed and hybrid finite element methods. *Springer Series in Computational Mathematics*, 15.
- [Garg, 1988] GARG, A. (1988). Delamination - a damage mode in composite structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 29(5):557–584.
- [Garusi et Tralli, 2002] GARUSI, E. et TRALLI, A. (2002). A hybrid stress-assumed transition element for solid-to-beam and plate-to-beam connections. *Computers & Structures*, 80(2):105–115.
- [Gendre, 2009] GENDRE, L. (2009). *Approche globale/locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité locale*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Gendre *et al.*, 2011] GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(9):889–905.
- [Gendre *et al.*, 2009] GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- [Gmür et Kauten, 1993] GMÜR, T. C. et KAUTEN, R. H. (1993). Three-dimensional solid-to-beam transition elements for structural dynamics analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 36(9):1429–1444.
- [Gol'Denveizer et Kolos, 1965] GOL'DENVEIZER, A. et KOLOS, A. (1965). On the derivation of two-dimensional equations in the theory of thin elastic plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 29(1):151–166.
- [Gregory et Wan, 1985] GREGORY, R. et WAN, F. (1985). On plate theories and Saint-Venant's principle. *International journal of solids and structures*, 21(10):1005–1024.
- [Gregory et Wan, 1984] GREGORY, R. D. et WAN, F. Y. (1984). Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *Journal of elasticity*, 14(1):27–64.
- [Guinard *et al.*, 2002] GUINARD, S., ALLIX, O., GUÉDRA-DEGEORGES, D. et VINET, A. (2002). A 3D damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science and Technology*, 62(4):585–589.
- [Haas et Kuhn, 2003] HAAS, M. et KUHN, G. (2003). Mixed-dimensional, symmetric coupling of FEM and BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(6):575–582.



- [Helldörfer *et al.*, 2008] HELLDÖRFER, B., HAAS, M. et KUHN, G. (2008). Automatic coupling of a boundary element code with a commercial finite element system. *Advances in Engineering Software*, 39(8):699–709.
- [Horgan, 1982] HORGAN, C. O. (1982). Saint-Venant end effects in composites. *Journal of Composite Materials*, 16(5):411–422.
- [Horgan et Knowles, 1983] HORGAN, C. O. et KNOWLES, J. K. (1983). Recent developments concerning Saint-Venant's principle. *Advances in Applied Mechanics*, 23:179–269.
- [Ibrahimbegovic et Markovic, 2003] IBRAHIMBEGOVIC, A. et MARKOVIC, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28–30):3089 – 3107. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness/force SBSF method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7):1567–1578.
- [Johansen et Lund, 2009] JOHANSEN, L. et LUND, E. (2009). Optimization of laminated composite structures using delamination criteria and hierarchical models. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(4):357–375.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. *In Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*, pages 39–42.
- [Kim *et al.*, 1997] KIM, J., VARADAN, V. V. et VARADAN, V. K. (1997). Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(5):817–832.
- [Kim et Cho, 2007] KIM, J.-S. et CHO, M. (2007). Enhanced first-order theory based on mixed formulation and transverse normal effect. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3–4):1256–1276.
- [Koiter, 1970] KOITER, W. T. (1970). On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, B73(3):279–286.
- [Ladevèze, 1976a] LADEVÈZE, P. (1976a). Justification for linear-theory of elastic shells. *Journal de mécanique*, 15(5):813–856.
- [Ladevèze, 1976b] LADEVÈZE, P. (1976b). Validity criteria of nonlinear-theory of thin elastic shells. *Journal of structural mechanics*, 4(3):327–348.
- [Ladevèze, 1983] LADEVÈZE, P. (1983). On the Saint-Venant principle in elasticity. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2(2):161–184.
- [Ladevèze, 1987] LADEVÈZE, P. (1987). A new version of the reissner-mindlin theory for orthotropic homogeneous plates. *Comptes-rendus de l'academie des sciences série II*, 305(12):1033–1036.

- [Ladevèze, 2002] LADEVÈZE, P. (2002). The exact theory of plate bending. *Journal of elasticity*, 68(1):37–71.
- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1(1):18–28.
- [Ladevèze et al., 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):121–138.
- [Ladevèze et Pecastaings, 1988] LADEVÈZE, P. et PECASTAINGS, F. (1988). The optimal version of reissner’s theory. *Journal of applied mechanics*, 55(2):413–418.
- [Ladevèze et Simmonds, 1999] LADEVÈZE, P. et SIMMONDS, J. G. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Berlin.
- [Ladevèze, 1980] LADEVÈZE, P. (1980). On the validity of linear shell theories. In KOITER, W. T. et MIKHAILOV, G. K., éditeurs : *Theory of shells*, pages 367–391. North-Holland.
- [Ladevèze, 1998] LADEVÈZE, P. (1998). La théorie exacte de la flexion des plaques. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(7):407–414.
- [Lebée et Sab, 2011] LEBÉE, A. et SAB, K. (2011). A bending-gradient model for thick plates. part I : Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20):2878–2888.
- [Lebon, 2011] LEBON, G. (2011). *Analyse de l’endommagement des structures de génie civil : techniques de sous-structuration hybride couplées à un modèle d’endommagement anisotrope*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987] LEGUILLON, D. et SANCHEZ-PALENCIA, E. (1987). *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Leiva et al., 2010] LEIVA, J. S., BLANCO, P. J. et BUSCAGLIA, G. C. (2010). Iterative strong coupling of dimensionally heterogeneous models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(12):1558–1580.
- [Lindemann et Becker, 2000] LINDEMANN, J. et BECKER, W. (2000). Analysis of the free-edge effect in composite laminates by the boundary finite element method. *Mechanics of Composite Materials*, 36(3):207–214.
- [Loredo, 2012] LOREDO, A. (2012). Transverse shear warping functions for anisotropic multilayered plates. *arXiv :1211.0781*.
- [Lure, 1964] LURE, A. (1964). *Three-dimensional problems of the theory of elasticity*. Interscience Publishers.

- [Magoulès *et al.*, 2006] MAGOULÈS, F., ROUX, F.-X. et SERIES, L. (2006). Algebraic approximation of dirichlet-to-neumann maps for the equations of linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(29):3742–3759.
- [Maisonnette, 1971] MAISONNEUVE, O. (1971). *Sur le principe de Saint-Venant*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [Mandel et Brezina, 1993] MANDEL, J. et BREZINA, M. (1993). *Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in Two and Three Dimensions*. University of Colorado at Denver, Denver, CO, USA.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):29–43.
- [McCune *et al.*, 2000] MCCUNE, R. W., ARMSTRONG, C. G. et ROBINSON, D. J. (2000). Mixed-dimensional coupling in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(6):725–750.
- [Mittelstedt et Becker, 2004] MITTELSTEDT, C. et BECKER, W. (2004). Interlaminar stress concentrations in layered structures : Part I - A selective literature survey on the free-edge effect since 1967. *Journal of Composite Materials*, 38(12):1037–1062.
- [Moës et Belytschko, 2002] MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). X-fem, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4):305–318.
- [Monaghan *et al.*, 1998] MONAGHAN, D. J., DOHERTY, I. W., COURT, D. M. et ARMSTRONG, C. G. (1998). Coupling 1D beams to 3D bodies. In *Proc. 7 th Int. Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories*, page 285–293.
- [Neff, 2004] NEFF, P. (2004). A geometrically exact cosserat shell-model including size effects, avoiding degeneracy in the thin shell limit. part i : Formal dimensional reduction for elastic plates and existence of minimizers for positive cosserat couple modulus. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16(6):577–628.
- [Nguyen *et al.*, 2014] NGUYEN, V. P., KERFRIDEN, P., BRINO, M., BORDAS, S. P. et BONISOLI, E. (2014). Nitsche’s method for two and three dimensional nurbs patch coupling. *Computational Mechanics*, 53(6):1163–1182.
- [Noor et Peters, 1989] NOOR, A. K. et PETERS, J. M. (1989). A posteriori estimates for the shear correction factors in multi-layered composite cylinders. *Journal of engineering mechanics*, 115(6):1225–1244.
- [Oden *et al.*, 1999] ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOËS, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1):3–25.
- [Park et Felippa, 2000] PARK, K. et FELIPPA, C. (2000). A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):395–418.
- [Passieux *et al.*, 2013] PASSIEUX, J.-C., RÉTHORÉ, J., GRAVOUIL, A. et BAIETTO, M.-C. (2013). Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, pages 1–13.

- [Pebrel *et al.*, 2007] PEBREL, J., GOSSELET, P. et REY, C. (2007). Une approche par patchs pour les non linéarités localisées en calcul de structures. *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*.
- [Pecastaings, 1985] PECASTAINGS, F. (1985). On a method to evaluate edge effects in elastic plates. *P. Ladeveze, éd. : Local effects in the analysis of structures. Elsevier Science*.
- [Pecastaings, 1987] PECASTAINGS, F. (1987). Approximation au second ordre des déplacements et des contraintes dans une plaque épaisse en flexion. volume 38(6, pages 893–904. Birhauser Verlag - Basel.
- [Pipes et Pagano, 1970] PIPES, R. B. et PAGANO, N. (1970). Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *Journal of Composite Materials*, 4(4):538–548.
- [Plews *et al.*, 2011] PLEWS, J., DUARTE, C. et EASON, T. (2011). An improved non-intrusive global-local approach for sharp thermal gradients in a standard FEA platform.
- [Rand, 1998] RAND, O. (1998). Fundamental closed-form solutions for solid and thin-walled composite beams including a complete out-of-plane warping model. *International Journal of Solids and Structures*, 35(21):2775–2793.
- [Rank et Krause, 1997] RANK, E. et KRAUSE, R. (1997). A multiscale finite-element method. *Computers & Structures*, 64(1–4):139–144.
- [Ransom et Knight Jr, 1990] RANSOM, J. et KNIGHT JR, N. (1990). Global/local stress analysis of composite panels. *Computers & Structures*, 37(4):375–395.
- [Ransom *et al.*, 1992] RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et KNIGHT JR, N. F. (1992). Computational methods for global/local analysis. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 92:33104.
- [Rateau, 2003] RATEAU, G. (2003). *Méthode Arlequin pour les problèmes mécanique multi-échelles*. Thèse de doctorat, Ecole centrale Paris.
- [Reddy, 1990a] REDDY, J. (1990a). A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 25(6):677–686.
- [Reddy, 1990b] REDDY, J. (1990b). On refined theories of composite laminates. *Meccanica*, 25(4):230–238.
- [Reddy, 1984] REDDY, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of applied mechanics*, 51(4):745–752.
- [Robinson *et al.*, 2011] ROBINSON, T., ARMSTRONG, C. et FAIREY, R. (2011). Automated mixed dimensional modelling from 2D and 3D CAD models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(2):151–165.
- [Rohwer et Rolfes, 1998] ROHWER, K. et ROLFES, R. (1998). Calculating 3D stresses in layered composite plates and shells. *Mechanics of composite materials*, 34(4):355–362.

- [Rolfes et Rohwer, 1997] ROLFES, R. et ROHWER, K. (1997). Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1):51–60.
- [Saad, 2003] SAAD, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2nd édition.
- [Sanchez *et al.*, ] SANCHEZ, P., LADEVEZE, P. et SIMMONDS, J. Application de la théorie exacte des poutres par la méthode des éléments finis.
- [Shim *et al.*, 2002] SHIM, K., MONAGHAN, D. et ARMSTRONG, C. (2002). Mixed dimensional coupling in finite element stress analysis. *Engineering with Computers*, 18(3):241–252.
- [Simmonds, 1972] SIMMONDS, J. G. (1972). Pointwise displacement errors in linear shell theory resulting from errors in the stress-strain relations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 23(2):265–269.
- [Sternberg et Knowles, 1966] STERNBERG, E. et KNOWLES, J. (1966). Minimum energy characterizations of Saint-Venant's solution to the relaxed Saint-Venant problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 21(2).
- [Sutyrin et Hodges, 1996] SUTYRIN, V. et HODGES, D. (1996). On asymptotically correct linear laminated plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 33(25):3649–3671.
- [Touratier, 1991] TOURATIER, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8):901–916.
- [Tullini *et al.*, 1997] TULLINI, N., SAVOIA, M. et HORGAN, C. (1997). End effects in multilayered orthotropic strips with imperfect bonding. *Mechanics of Materials*, 26(1): 23–34.
- [Ubertini, 2004] UBERTINI, F. (2004). Patch recovery based on complementary energy. *International journal for numerical methods in engineering*, 59(11):1501–1538.
- [Wang et Choi, 1982] WANG, S. et CHOI, I. (1982). Boundary layer effects in composites laminates. *Journal of Applied Mechanics, Part I and 2*, 49.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and structures*, 40(4):1027–1031.
- [Whitney, 1973] WHITNEY, J. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40:302.
- [Widlund et Toselli, 2005] WIDLUND, O. et TOSELLI, A. (2005). *Domain decomposition methods - algorithms and theory*, volume 34 de *Series in computational mechanics*. Springer.
- [Wung, 1997] WUNG, P. (1997). Laminated composite structures by continuum-based shell elements with transverse deformation. *Computers & structures*, 62(6):1073–1090.

- [Wyart *et al.*, 2007] WYART, E., COULON, D., DUFLLOT, M., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2007). A substructured FE-shell/XFEM-3D method for crack analysis in thin-walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(7):757–779.
- [Yu, 2005] YU, W. (2005). Mathematical construction of a Reissner-Mindlin plate theory for composite laminates. *International journal of solids and structures*, 42(26):6680–6699.
- [Yu *et al.*, 2003] YU, W., HODGES, D. H. et VOLOVOI, V. V. (2003). Asymptotically accurate 3D recovery from reissner-like composite plate finite elements. *Computers & Structures*, 81(7):439 – 454.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364.